Infinitesimale Kegelige Überschall-strömung

Von Adolf Busemann

Kegelige Strömungsfelder

Wirkliche Strömungen spielen sich stets im dreidimensionalen Raum ab. Für die Berechnung einer Strömung wird es aber sehr begrüßlich, wenn man es nur mit zwei wesentlichen Koordinaten zu tun hat. Derartige auf zwei Koordinaten beschränkte Strömungen bilden die ebene Strömung und die achsensymmetrische Strömung. Der durch die Stromlinien gefaserte Raum wird dabei in Ebenen parallel zur Faser dargestellt, die gewisse Stromlinien in ihrer ganzen Ausdehnung enthalten. Bei den kegeligen Strömungsfeldern werden die Fasern dagegen quer durchschnitten, so daß jede Stromlinie in der Bildebene enthalten ist, dort aber nur als Punkt erscheint. Diese Verhältnisse sind in Abbildung 1 veranschaulicht. Die parallele Anblasung und die Gestalt des angeblasenen Körpers lassen bei Vernachlässigung der Reibung eine Strömung erwarten, die in sich selbst geometrisch ähnlich vergrößert oder verkleinert werden kann. Hierbei bleibt der Fixpunkt P und die Richtung der drei räumlichen Achsen x, y und z erhalten. Alle wesentlichen Merkmale der Strömung und die Gestalt des Körpers lassen sich aus der Ebene $z = 1$ entnehmen. Denn eine Ebene $z = 2$ würde in doppelten Entfernungen identische Werte für Gaszustände und Geschwindigkeiten liefern. Die Isobarenflächen haben im Raume x, y, z kegelige Gestalt mit der Kegelspitze in P, daher seien diese Strömungen kurz als kegelige Strömungsfelder bezeichnet.

Infinitesimale Druckunterschiede

In Abbildung 1 sollen die allgemeinen kegeligen Strömungsfelder noch eine weitere Einschränkung besitzen, indem der umströmte Körper die Parallelströmung nur wenig stört. Die kegeligen Isobaren geben also nur Über- und Unterdrücke wieder, die infinitesimal vom Druck der Parallelströmung abweichen. Diese doppelte Beschränkung auf kegelig und infinitesimal ist insofern nicht so besonders einschneidend, als im Bereiche der Potentialströmungen nur die kegeligen Felder mit Achsen-symmetrie nur die infinitesimalen kegeligen Felder vorhanden sind. Alle anderen kegeligen Strömungen sind mit Wirbeln behaftet. Die infinitesimalen kegeligen Überschallströmungen sind jedoch noch in anderer Weise ausgezeichnet: bei ihnen ist die Superposition von Feldern mit verschiedenen Fixpunkten P trotz der sonst nichtlinearen Differentialgleichung gestattet, wodurch die Anwendbarkeit eine erfreuliche Erweiterung erfährt.

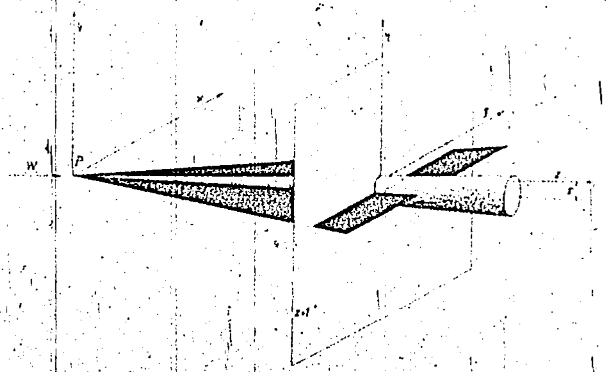


Abb. 1

Koordinaten im kegeligen Feld

Differentialgleichung

Von den beiden Wegen, die Differentialgleichung für das Potential in kegeligen Feldern auf kleine Zusatzgeschwindigkeiten u, v, w zu beschränken und die Differentialgleichung für fast parallele räumliche Strömungen auf kegelige Felder zu beschränken, ist der erste der tatsächlich benutzte, aber der zweite der einfachere. Daher sei hier der zweite gewählt. Die linearisierte Differentialgleichung im Raume x, y, z für das Zusatzpotential φ über einer Grundgeschwindigkeit W in Richtung der z-Achse lautet bei der Schallgeschwindigkeit a des Gases bekanntlich:

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz}\left(1 - \frac{W^2}{a^2}\right) = 0 \,. \qquad (1)$$

Die Koordinaten ξ und η der kegeligen Strömung [illegible] ordinaten des Raumes x und y auf der Ebene $z = 1$.

$$\xi = \frac{x}{z} \quad \text{und} \quad \eta = \frac{y}{z}$$

Das Zusatzpotential φ wächst auf jedem Strahl durch Ursprung P proportional der Entfernung. Das durch z dividierte Potential ist daher auf dem einzelnen Strahl invariant und liefert das Potential der kegeligen Strömung:

$$\chi(\xi, \eta) = \frac{1}{z}\,\varphi(x, y, z) \tag{3}$$

Die Zusatzgeschwindigkeiten u, v, w über der Grundgeschwindigkeit W ergeben sich als Ableitungen des früheren Potentials φ jetzt in folgender Weise:

$$u = \varphi_x = \chi_\xi, \quad v = \varphi_y = \chi_\eta, \quad w = \varphi_z = \chi - \xi \chi_\xi - \eta \chi_\eta \tag{4}$$

Die Differentialgleichung für das neue Potential χ bestimmt sich aus der alten Differentialgleichung, und man erhält:

$$\chi_{\xi\xi}\left(1 - \frac{\xi^2}{A^2}\right) + \chi_{\eta\eta}\left(1 - \frac{\eta^2}{A^2}\right) - \chi_{\xi\eta}\,\frac{2\xi\eta}{A^2} = 0 \tag{5}$$

mit

$$\frac{1}{A} = \sqrt{\frac{W^2}{a^2} - 1} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Es ist sicher erfreulich, im Typ dieser Differentialgleichung einen alten Bekannten aus der ebenen Gasströmung wiederzuerkennen. Die nach Legendre transformierte Stromfunktion der ebenen Strömung über den Komponenten der Stromdichte aufgetragen liefert nämlich genau die gleiche Differentialgleichung. Bei gewöhnlichen Gasen ist jedoch der Nenner A^2 eine Ortsfunktion, doch gibt es ein besonderes Gas mit geradliniger Adiabaten im Druck-Volumen-Diagramm, bei dem auch dieser Nenner wie erforderlich konstant bleibt. Dieses Gas erfreut sich sogar einer besonderen Beliebtheit, wenn es nur auf numerische Berechnungen ankommt.

Einflußbereiche

Die räumliche Differentialgleichung der Gasströmung ist bei Überschallgeschwindigkeit von hyperbolischem Charakter, wie Gleichung (1) zeigt. Das bedeutet, jeder Punkt der Strömung beherrscht einen kegeligen

Bereich der sich stromabwärts öffnet [illegible] von denjenigen Punkten beherrscht, die an dem rückwärtigen [illegible] nach stromaufwärts sich öffnenden Kegel liegen. [illegible] die Abhängigkeiten [illegible] mehrdeutig [illegible] Probekörpers [illegible] erscheinen, wenn die Abhängigkeiten der [illegible] Strömung eine Erweiterung erfahren, sobald [illegible] räumlichen Strömung übergeht. Doch lehrt diese Betrachtung, daß innerhalb des Kreises mit dem Radius A der elliptische Charakter besteht.

Die Tatsache, daß alle Punkte eines Strahles von P aus zu einer Einheit zusammengefaßt sind, erklärt dieses Verhalten sehr leicht. Das Abhängigkeitsverhältnis zweier Strahlen ergibt sich aus den Abhängigkeiten der einzelnen Punkte. Es tritt nur das Merkmal „unabhängig" in gewissen Fällen einheitlich für alle Punktpaare auf (P selbst ist ausgeschlossen). Aus der Kombination übergeordnet und unabhängig wird übergeordnet, aus untergeordnet und unabhängig wird untergeordnet. Gibt es auf den Strahlen aber Punktepaare aller Gattungen, so sind die Strahlen mit dem neuen Merkmal „gegenseitig abhängig" behaftet. Derartige Strahlen erfüllen das Innere des Machschen Kegels vom Punkt P aus.

Charakteristiken

Der Machsche Kegel von P aus schneidet die Ebene $z = 1$ im Kreise mit dem Radius A. Im Außengebiet dieses Kegels, d. h. außerhalb des Kreises in der Schnittebene, erhält man im Schnitt geradlinige Charakteristiken der Differentialgleichung (5), welche den Kreis mit dem Radius A tangieren. In Abbildung 2 ist dies durch zwei Drähte a und b veranschaulicht, wovon der Draht b etwas stromaufwärts geneigt verläuft, um auch derartige Fälle nicht auszuschließen. Der Störbereich ergibt sich aus der Summe aller Machschen Kegel von allen Punkten des Drahtes aus. Es ist sofort zu ersehen, daß als Grenzen des Störbereichs nur der Kreis mit dem Radius A und seine Tangenten auftreten können. Außerhalb des Machschen Kegels vom Punkte P aus erledigen sich alle Fragen durch diese Charakteristiken und lassen sich auf den ebenen Fall mit einer Schiebekomponente der Geschwindigkeit zurückführen. Der wesentliche und andersartige Teil der kegeligen Felder betrifft daher den Mantel des Machschen Kegels vom Punkt P und sein Inneres.

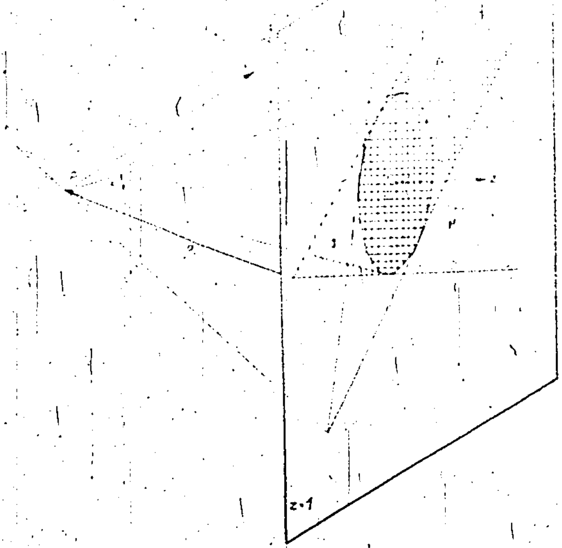


Abb. 2

Störgebiet der Drähte *a* und *b*

Tschapliginsche Abbildung

In der Schnittebene $z = 1$ finden wir innerhalb des Kreises vom Radius A den elliptischen Charakter der Differentialgleichung (5). Nahe am Mittelpunkt gilt sogar die Differentialgleichung der Potentialtheorie, die man in ebenen Fällen durch analytische Funktionen des komplexen Ortsvektors befriedigen kann. In diesem Kreis ist demnach nur eine gegenseitige Abhängigkeit, aber noch keine völlige Gleichwertigkeit aller Orte vorhanden, was kein Wunder ist, weil die analytische Fortsetzung der Ebene in das Außengebiet des Kreises geht. Tschapligin kann jedoch eine Abbildung angeben, die das Gebiet innerhalb des Kreises so verzerrt, daß Gleichwertigkeit in bezug auf die Differentialgleichung eintritt. Wie Abbildung 3 zeigt, erreicht man diese Verzerrung, wenn man die Ebene [illegible] mit dem komplexen Ortsvektor [illegible] durch Parallelprojektion auf eine Kugel vom Radius A überträgt und dann von

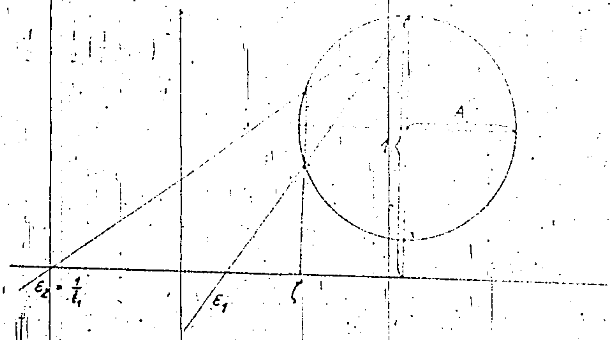


Abb. 3
Die Tschapliginsche Abbildung

einem Pol der Kugel aus auf eine Ebene im Abstand 1 wirft. Man erkennt leicht, daß nur noch das Innere des Kreises vom Radius A zur Abbildung gelangt und einmal von der unteren Halbkugel auf das Innere des Einheitskreises der neuen Ebene mit dem komplexen Ortsvektor ε abgebildet wird, ein zweites Mal von der oberen Halbkugel auf das Außengebiet des Einheitskreises gelangt. In diesen Koordinaten kann man analytische Funktionen zur Lösung heranziehen.

Lösung der Differentialgleichung

Für jede der Geschwindigkeitskomponenten u, v und w kann man den Realteil einer analytischen Funktion $f(\varepsilon)$ ansetzen. Zweckmäßig setzt man ihn für die Komponente w an, weil sich dann die miteinander stärker verwandten Komponenten u und v gemeinsam berechnen lassen:

$$w = A \cdot Re\,(f(\varepsilon)) \quad \text{bzw.} \quad w + is = A \cdot f(\varepsilon), \tag{6}$$

[illegible]

[illegible]

Aus den Geschwindigkeitskomponenten ergibt sich der Druck in der Strömung mit Hilfe der Dichte ϱ wie folgt

[illegible] (8)

Die geeignete Funktion $f(\varepsilon)$ ist mit Hilfe der Randbedingungen auszuwählen.

Randbedingungen

Das Äußere des Machschen Kegels ist dem Machschen Kegel selbst übergeordnet. Daher sind zunächst diejenigen Geschwindigkeiten u, v und w zu ermitteln, die sich aus dem Außengebiet auf dem Kreis mit dem Radius A der ζ-Ebene, also auf dem Einheitskreis der ε-Ebene ergeben. Ragt der umströmte Körper nirgends aus dem Machschen Kegel heraus, so sind insbesondere die Werte $u = v = w = 0$ auf dem Einheitskreis gegeben. Ist im Gegenteil kein Bestandteil des angeblasenen Körpers im Innern des Machschen Kegels, so sind die Werte von w durch eine im Innern des Kreises singularitätenfreie analytische Funktion $f(\varepsilon)$ mit den gegebenen Randwerten auf dem Kreis darzustellen. Ergibt $f(\varepsilon)$ im Nullpunkt keinen stationären Wert $df = 0$, so erhalten u und v nach Gleichung (7) eine logarithmische Singularität im Nullpunkt. Die vielblättrige Funktion läßt sich bei Verwendung radialer Schnitte mit den Randwerten von u und v auf dem Einheitskreis eindeutig auswählen. Die radialen Schnitte ergeben Wirbelschichten, wie sie physikalisch vom tragenden Teil des angeblasenen Körpers zu erwarten sind.

Feste Begrenzungen des angeblasenen Körpers kann man mit in die ε-Ebene übertragen, sie müssen Stromlinien im Felde der Relativgeschwindigkeit

$$\Omega_{rel} = \omega + \varepsilon^2 \bar{\omega} - 2AW\varepsilon \tag{9}$$

sein. Diese Bedingung ist nicht immer leicht zu erfüllen. Besitzt der Körper jedoch geradlinige Oberflächenelemente, die in der ε-Ebene nur in infinitesimaler Entfernung am Nullpunkt vorbeigehen oder in der Verlängerung an ihm vorbeizeigen, so gilt auf ihnen, daß der bisher sinnlose Imaginärteil s der Funktion $f(\varepsilon)$ konstant bleibt, wobei man die

Oberfläche genau in radiale Richtung verlegen darf. Geht der [illegible] Teil dann über den Nullpunkt hinaus, so muß am Nullpunkt selbst ein stationärer Wert [illegible] werden. [illegible] Bedingungen [illegible] besonders angenehm. [illegible] für den Fall gegebener Drucke oder [illegible] Auftriebe [illegible]. Das Verschwinden des [illegible] oder des [illegible] Linien durch Randbedingungen oder Symmetrie läßt sich in bekannter Weise durch Spiegelung gegebenenfalls nach konformer Abbildung erreichen, wie die Beispiele lehren sollen.

Beispiele

1. Der gerade angeblasene Kreiskegel

Für den einzigen achsensymmetrischen Fall, den gerade angeblasenen Kreiskegel mit infinitesimalem Öffnungswinkel 2α (Abbildung 4) liefert selbstverständlich der Ansatz

$$w = [illegible]\, C \cdot \ln z \qquad (10)$$

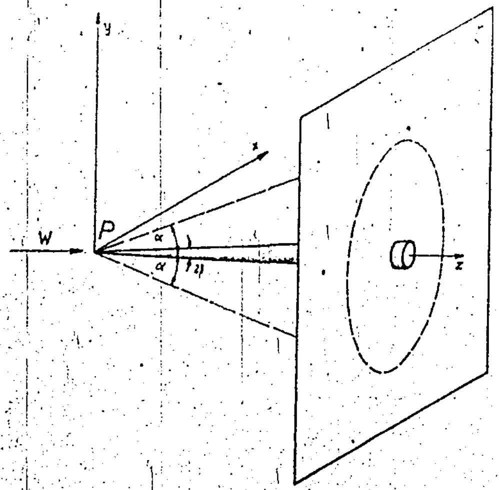


Abb. 4
Gerade angeblasener Kreiskegel

[illegible]

[illegible] Der schräg angeblasene Kreiskegel

Mit Hilfe der Relativgeschwindigkeit [illegible] Gleichung [illegible] auch den Kreiskegel mit Schräganblasung (Abb. 5) zu berechnen, wobei zwar Öffnungswinkel und Anstellwinkel infinitesimal sind, aber jeder beliebig groß im Verhältnis zum anderen werden darf. Die Lösung ist:

$$[illegible] \qquad (12)$$

und der Druck am Kegelumfang:

$$p = \varrho W^2 ([illegible] \ln [illegible] - 2 [illegible] \cos \vartheta - [illegible] \cos 2\vartheta) . \qquad (13)$$

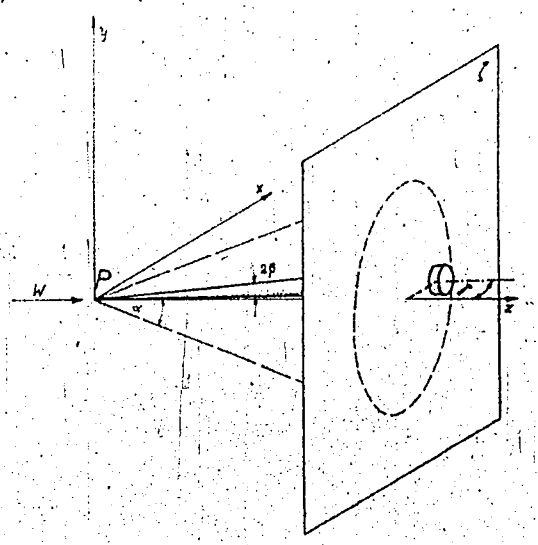


Abb. 5.
Schräg angeblasener Kreiskegel

Macht man den Winkel [illegible] der Schwanzfläche [illegible] wieder den gerade [illegible] Kreis[illegible] winkel 2 [illegible] verschwinden [illegible] Zylinders [illegible] Verdichtung [illegible] schwindigkeit [illegible] senkrecht zur [illegible] sprechender [illegible] Vergleiche.

[illegible] Rand [illegible]

Wird eine ebene Rechteckplatte [illegible] Vorderkante mit infinitesimalen [illegible] so kann man den Fixpunkt P in den [illegible] legen, wenn man das Druck- und Geschwindigkeitsfeld nur bis zur Hinterkante der Platte braucht. Es wird dann durch die [illegible] auf der Viertelebene zwischen der positiven z-Achse und der negativen x-Achse bei einer gedachten infinitesimalen Drehung um den Anstell[illegible]

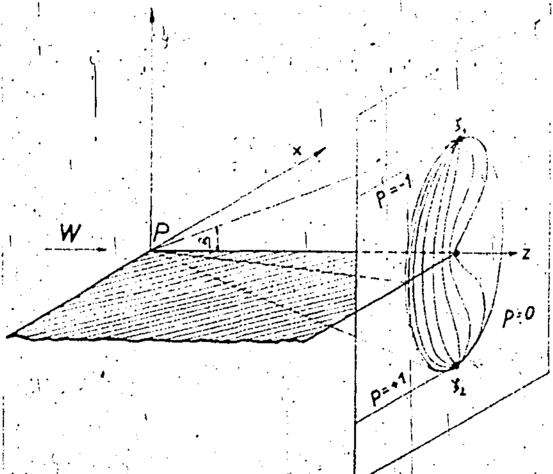


Abb. 6
Rand einer Rechteckplatte

[illegible]

[illegible] ... in Abbildung 7 dargestellt:

$$[illegible] \qquad (14)$$

Die Druckverteilung an beiden Rändern einer Rechteckplatte zeigt Abbildung 8. Als tragender Druck ist dabei die Hälfte des Unterschiedes zwischen Druck- und Saugseite aufgetragen:

$$\frac{1}{2}(p_u - p_o) = [illegible]\ \mathrm{arc\,cos}\ [illegible] \qquad (15)$$

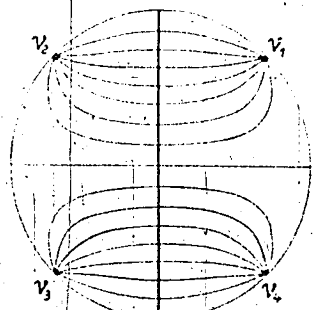
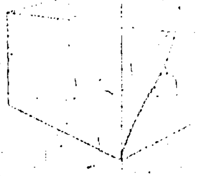


Abb. 7
Konforme Abbildung zum Rand der Rechteckplatte



Tragendes Dreieck

Je zwei Strahlen von P aus ergeben ein Dreieck [illegible] $z = 1$, wenn man alle Punkte verbindet. Wegen der verlangten infinitesimalen Störung der Parallelströmung darf aber der Anstellwinkel nur infinitesimal sein, so daß die Ebene der beiden Strahlen nahezu durch die z-Achse gehen muß. Derartige Dreiecke sind völlig innerhalb des Machschen Kegels, völlig außerhalb, einseitig oder zweiseitig herausragend möglich. Hier soll nur der einfachste Fall des tragenden Dreiecks außerhalb des Machschen Kegels betrachtet werden, obwohl sich auch alle anderen Fälle leicht integrieren lassen.

Abbildung 9 zeigt dieses tragende Dreieck. Die Geschwindigkeits-Komponente w, die den Druck überwiegend beeinflußt, ist nur auf den kurzen Bögen zwischen ζ_1' und ζ_3 sowie ζ_1 und ζ_2 von Null verschieden. Die Werte Null ergeben sich rechts aus der Ungestörtheit und links wegen des Druckausgleichs hinter dem Dreieck unter Berücksichtigung der Symmetrie bei positivem und negativem Anstellwinkel. Die Verhältnisse in der ε-Ebene zeigt Abbildung 10. Denkt man daran, die Hinterkante des Dreiecks noch wandern zu lassen, während die Vorderkante festliegt, so wird man die Punkte ζ_1 und ζ_2 erst allein in die ε-Ebene übertragen. Dabei muß für w unter geeigneter Normierung bei ζ_1 ein Anstieg von 0 auf $+\pi$ und bei ζ_2 ein Anstieg von $-\pi$ auf Null eintreten, wenn man auf dem Kreis in Richtung wachsender Winkel umläuft. Man kann diesen Teil der Lösung durch Annahme einer weiteren Singularität im Nullpunkt auch unabhängig behandeln:

$$f(\varepsilon) = i\,\{ln\,(\varepsilon - \varepsilon_1) + ln\,(\varepsilon - \varepsilon_2)\,ln\,\varepsilon\} \tag{16}$$

$$p_l - p_r = \text{const.} \tag{17}$$

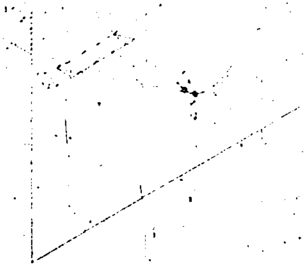


Abb. 9
Tragendes Dreieck

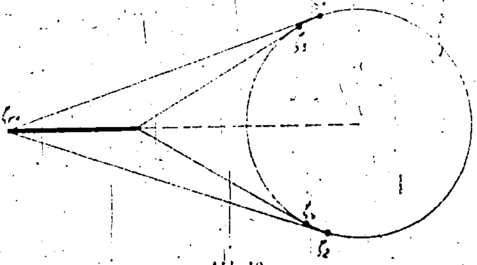


Abb. 10
Querschnitt vom tragenden Dreieck

Physikalisch gedeutet hat man dann [illegible] zwischen der Vorderkante [illegible] schen Kegeln [illegible] malige Belastung [illegible] und deren [illegible]

[illegible]

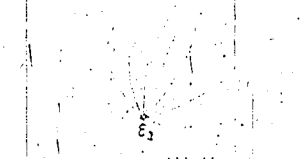


Abb. 11

Abbildung des tragenden Dreiecks in die Ebene

5. *Überlagerung zweier kegeliger Strömungen*

Die infinitesimalen kegeligen Strömungen dürfen überlagert werden, auch ohne daß der Fixpunkt wie im Beispiel 4 gemeinsam ist. Daher kann man die Verhältnisse an der ebenen Platte auch bei größerer Plattentiefe darstellen. Abbildung 12 zeigt die Isobaren des Plattenrandes und ihre Überlagerung nach der gegenseitigen Durchdringung der Mach-schen Kegel. Erst wenn die Kegel den anderen Plattenrand erreichen, sind andere Grenzbedingungen für die Teillösungen zu berücksichtigen. Merkwürdig ist das Verschwinden des Drucks längs einer geraden Linie in jener Entfernung, bei der die Kegel den anderen Plattenrand erreichen. Hier endet der allein positiv belastete Teil der Platte. Abbildung 13 zeigt die Auftriebsverteilung des positiv belasteten Teils in perspektivischer Darstellung.

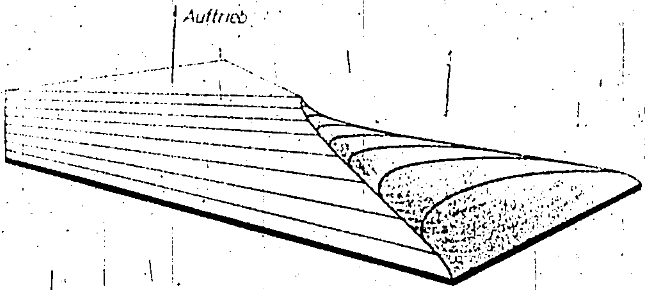


Abb. 13
Druckverteilung auf der ebenen Rechteckplatte bei Überschall

Will man das Geschwindigkeitsfeld hinter einer Rechteck- [illegible]

Zusammenfassung

Die Berechnung infinitesimaler kegeliger Überschallströmungen wurde zunächst an den einfachsten Beispielen gezeigt, die auch auf andere Weise berechnet waren. Bis auf die Entdeckung eines leicht zu behebenden Rechenfehlers in einer älteren Arbeit ergab sich die erwartete Übereinstimmung. Die neue Berechnungsart ist zwar stärker auf den kegeligen Fall beschränkt, dafür bietet sie aber größere Bequemlichkeit, weil ihre Lösung durch analytische Funktionen erreicht wird. Eine eingehendere Beschäftigung mit kegeligen Feldern als Sonderfällen in Überschallströmungen ergibt sich aus der grundsätzlichen Erkenntnis, daß dort der hyperbolische Charakter durch den elliptischen abgelöst wird. Man wird zwar gern den elliptischen als nur scheinbar bezeichnen, denn wenn man in einen angeblasenen Kegel eine Kerbe schlägt, so offenbart sich sofort wieder der wahre hyperbolische Charakter des Strömungsfeldes stromabwärts dieser Kerbe. Verfolgt man aber die Strömung sehr weit hinter der Kerbe, so wird innerhalb des Machschen Kegels bei schrittweisem Vorgehen eine abwechselnde Überordnung und Nachordnung auf je zwei Strahlen eintreten und hierdurch allmählich der kegelige Strömungsverlauf bei dem wachsenden Querschnitt des Kegels wiederhergestellt. Um daher an Orten mit offenbar kegeligem Strömungsfeld die endgültige Strömung nicht erst durch eine unendliche Folge von hyperbolischen Abhängigkeiten herstellen zu müssen, wird man solche Stellen doch wohl zweckmäßig von vornherein als besondere elliptische Singularitäten in der Überschallströmung behandeln. Hierin sehe ich die Bedeutung des kegeligen Feldes, von dem der infinitesimale Fall nur eine erste Näherung darstellt.

Der Deutschen Akademie der Luftfahrtforschung
vorgetragen am 4. Dezember 1942