# III. Die theoretischen Grundlagen für die Berechnung des Leistungsbedarfes von Rührwerken.

## 1) Allgemeines.

Die zum Antrieb eines Rührers unmittelbar der Welle zuzuführende Leistung N' setzt sich zusammen aus der eigentlichen Rührleistung L, die zur Aufrechterhaltung der der gewählten Drehzahl entsprechenden Flüssigkeitsbewegung erforderlich ist und der Summe $\Sigma R$ aller derjenigen Energiebeträge, die infolge der Reibung der Rührerwelle in den Führungen, Lagern, Stopfbüchsen usw. in Wärme umgesetzt werden.

$$N' = L + \Sigma R \qquad \text{Gl. 1}$$

Aus Gründen der Betriebssicherheit ist für die Bemessung von Antriebsmaschinen hierin für L der höchstmögliche Wert einzusetzen, der bei den im Rührgefäß durchzuführenden Prozessen eintreten kann. Auf die Möglichkeiten zu seiner genauen Ermittlung soll weiter unten ausführlich eingegangen werden.

Über die Größe der in den Lagern und Führungen der Rührerwelle auftretenden Verluste sind im Schrifttum hinreichende Unterlagen zu finden+). Im Gegensatz dazu gibt es kaum Angaben über die Reibungszahlen von Stopfbüchsen verschiedener Bauweise und Verpackungsarten. Um hierfür wenigstens

---

+) Hütte, Taschenbuch des Ingenieurs,
Dubbel, Taschenbuch für den Maschinenbau,
Gümbel-Everling, Reibung und Schmierung im Maschinenbau.

einige Anhaltspunkte zu finden, hat Dipl.-Ing. H e i d e - b r o c k die Reibungsmomente von Stopfbüchsen der bei Rührkesseln gebräuchlichen Form ermittelt+). Ihre Größe wurde für drei Wellendurchmesser in Abhängigkeit von Drehzahl, Verpakkungsmaterial, Verpackungsart, Brillendruck und Einlaufdauer bestimmt++).

Die tatsächlich erforderliche Antriebsleistung N ist größer als die Wellenleistung N'. Man setzt zweckmäßigerweise

$$N = \frac{N'}{\eta_{ü}} + S = \frac{L + \Sigma R}{\eta_{ü}} + S \qquad \text{......... Gl.2}$$

Hierin bedeutet $\eta_{ü}$ den Wirkungsgrad der meist zwischen Antriebswelle und Rührerwelle eingeschalteten Vorrichtung zum Untersetzen der Drehzahl (Winkelradbock, Riemen, Getriebe u.a.) und S ein Sicherheitszuschlag. Nun wird aber von den Lieferfirmen meist nur der Wirkungsgrad bezogen auf die Maximalleistung $N_{max}$, für die die Getriebe oder sonstige Übertragungsvorrichtungen bemessen sind, angegeben. Dasselbe gilt auch für viele im Schrifttum enthaltene Werte. Ist, was aus Sicherheitsgründen immer der Fall sein soll, $N' < N_{max}$, so ist $\eta_{ü}$ auch kleiner als der maximale Wirkungsgrad. Wegen der bestehenden Unsicherheit ist es daher richtiger, für Gl.2 die

---

+) Reibung in Stopfbüchsen, Bericht Nr.138 der Versuchsgruppe Lu.

++) Einige Werte der Reibungszahlen in Lagern, Führungen und Stopfbüchsen finden sich im Abschnitt IV.

Form

$$N = L + \Sigma R + (1 - \eta_{ü}) N_{max} + S \qquad \text{Gl. 3}$$

zu wählen.+) Die Größe des Sicherheitszuschlages S richtet sich nach den Betriebsbedingungen. Er ist bei kleinen Rührgefäßen im Verhältnis zu N' groß zu wählen, denn bei geringen Abmessungen sind die Reibungsverluste meist größer als die eigentliche Rührleistung. Die Größe des Sicherheitszuschlages hängt außerdem in starkem Maße von der gewählten Bauform ab. Für die üblichen Ausführungsarten der Rührvorrichtungen ergaben sich im Laufe der Zeit gewisse Erfahrungswerte, die sich praktisch bewährt haben. Hierauf wird später noch genauer eingegangen. Bei dem neuerdings viel verwendeten Einzelantrieb gibt also Gl. 3 die vorzusehende Wellenleistung des Motors an.

Die Vorausberechnung der für ein bestimmtes Rührgefäß erforderlichen Antriebsleistung ist demnach möglich, wenn es gelingt, auf rechnerischem Wege oder durch Modellversuche die zu erwartende Größe der eigentlichen Rührerleistung L zu bestimmen. Vor allem ist die Ermöglichung ihrer rechnerischen Ermittlung wünschenswert, da die Durchführung von Modellversuchen das Vorhandensein von Einrichtungen zur Messung von Wellenleistungen voraussetzt.

## 2) Die Verfahren zur Bestimmung der Rührleistung.

Die Größe des Leistungsanteiles, die der Rührer-

+) Eine genaue Begründung und einige Werte für $\eta_{ü}$ finden sich im Abschnitt IV.

welle zuzuführen ist, um einen bestimmten Bewegungsvorgang in der Flüssigkeit aufrecht zu erhalten, hängt von sehr vielen Veränderlichen ab. Unterteilt man diese Veränderlichen in solche geometrischer, kinematischer und stofflicher Art, so ergeben sich hierdurch drei zu betrachtende Gruppen.

Die erste Klasse umfaßt demnach alle Einflüsse, die durch die "geometrische Form" und die "Abmessung" gegeben sind. Unter "geometrischer Form" sei hierbei die charakteristische Gestalt des Gefäßes, des Rührers, ihre gegenseitige Lage zueinander, die relative Rauhigkeit der vom Rührgut benetzten Flächen, das Maß der Füllung usw., kurz all das verstanden, was hinsichtlich der Formgestaltung von Einfluß auf die Rührleistung ist. Die "Abmessung" soll bei gegebener geometrischer Form ein Maß für die absolute Größe der Ausführungsart darstellen.

Eine Reihe verschiedener Systeme, die ihrer Größe nach durchaus verschieden sein können, sind also geometrisch gleich, wenn bei dem einzelnen alle sich entsprechenden Abmessungen zueinander im selben Maßstabsverhältnis stehen. Sie unterscheiden sich lediglich durch die "Abmessung"

Die zweite Klasse berücksichtigt alle Auswirkungen auf den Leistungsbedarf, die von der im Rührgefäß bestehenden Geschwindigkeitsverteilung herrühren. Hierbei sind folgende Fälle zu unterscheiden:

Bei dem zu betrachtenden vorwiegend stationären Strömungszustand ist die an jeder Stelle herrschende Geschwindigkeit völlig unabhängig von der Zeit. Treten jedoch

Wellenbildungen an dem freien Oberflächenspiegel oder sonstige regelmässige Schwankungen auf, so sind bei dem sich kurze Zeit nach dem Anfahren des Rührers ausbildenden "quasistationären"Zustand an jedem betrachteten Punkt der Flüssigkeit die auftretenden Geschwindigkeiten nur periodische Funktionen der Zeit. Auf alle Fälle aber gilt für beide Strömungszustände das Gesetz, das sie - festliegende Form und bestimmte Stoffeigenschaften der Flüssigkeit vorausgesetzt - durch Angabe einer einzigen Geschwindigkeit an einer ( beliebig wählbaren ) Stelle für das zu betrachtende Problem hinreichend gekennzeichnet sind. Zweckmässigerweise wird man hierfür die leicht zu definierende Geschwindigkeit eines bestimmten Punktes des Rührers ( z.B. die Umfangsgeschwindigkeit ) wählen. Bei den <u>nicht stationären</u> Bewegungen ist die Kenntnis des zeitlichen Verlaufs der Flüssigkeitsbeschleunigung an irgendeiner Stelle notwendig.

Die dritte Klasse der Veränderlichen umfasst alle stofflichen Eigenschaften der zu rührenden Flüssigkeit, die auf die Grösse des erforderlichen Energiebedarfes von Einfluss sind.

Hierfür sind in erster Linie ausschlaggebend:

1) das spez. Gewicht ( Heben von Flüssigkeitsteilchen gegen die Wirkung des Schwerefeldes ),

2) die Massendichte ( Trägheitswiderstand von Flüssigkeitsteilchen gegen Beschleunigung ),

3) die innere Reibung ( Bewegung von Flüssigkeitsteilchen aneinander vorbei ),

4) die Oberflächenspannung ( Vergrösserung der Flüssigkeitsoberfläche durch Verformung des Spiegels oder Einziehen von Gasen unter Blasenbildung ).

Für die rein energetischen Betrachtungen, die der Gegenstand dieses Kapitels sind, ist der Einfluss der Oberflächenspannung praktisch immer zu vernachlässigen +). Er soll daher zunächst ohne Beachtung bleiben.

Hinsichtlich der Auswirkung der inneren Reibung auf den unter bestimmten Bedingungen zum Rühren erforderlichen Leistungsbedarf müssen jedoch die Flüssigkeiten in zwei Gruppen unterteilt werden:

Die erste soll diejenigen umfassen, die dem Newton'schen Ansatz für die Schubspannung gehorchen. Bei ihm wird angenommen, dass an jeder Stelle die Schubspannung $\sigma$ in der Flüssigkeit dem dort herrschenden Geschwindigkeitsgefälle ( $\frac{\partial v}{\partial s}$ ) direkt proportional ist.

Bezeichnet s die Richtung der Bewegung und v die zugehörige Geschwindigkeit, so gilt demnach

$$\sigma = \eta \frac{\partial v}{\partial s}$$

Darin ist der Proportionalitätsfaktor $\eta$ ( $\frac{kg\ sec}{m^2}$ ) die dynamische Zähigkeit.

Diese Gruppe umfasst infolgedessen alle Flüssigkeiten, für die beim Durchfluss durch Kapillaren das Poiseuillesche Gesetz gilt, d.h. bei denen das in der Zeiteinheit ausgeflossene Volumen der wirksamen Druckdifferenz direkt und der dynamischen Zähigkeit umgekehrt verhältnisgleich ist.

Der zweiten Gruppe der nicht Newton'schen Flüs-

---------

+) Vergleiche hierzu IIIc.

sigkeiten sollen alle diejenigen Flüssigkeiten zugeordnet werden, bei denen keine derartig einfache Beziehung für die Schubspannung besteht und die deshalb auch nicht dem Poiseuilleschen Gesetz gehorchen.

Im folgenden muß daher auch eine entsprechende Unterteilung in der Beurteilung der Verfahren zur Bestimmung der Rührleistung vorgenommen werden.

## a) Die Ermittlung des Leistungsbedarfes für das Rühren von Flüssigkeiten, die dem Poiseuilleschen Gesetz gehorchen.

Die allgemeinen Gesetzmäßigkeiten für die Größe des Leistungsbedarfes, der zur Aufrechterhaltung einer stationären (zeitlich nicht veränderlichen) Rührbewegung erforderlich ist, lassen sich auf verhältnismäßig einfachem Wege ableiten. Zu diesem Zweck ist es notwendig, die Widerstandskraft des Rührers in der von ihm bewegten Flüssigkeit zu ermitteln. Die Leistung ergibt sich dann als Produkt des Widerstandes mit der entsprechend definierten Bewegungsgeschwindigkeit des Rührers.

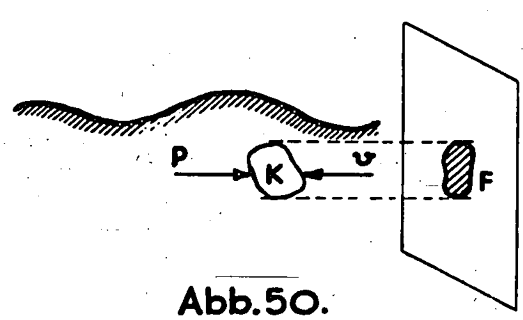


Abb.50.

Nach Newton setzt man auch heute noch die Widerstandskraft P (kg), die ein in einer Flüssigkeit mit der gleichbleibenden Geschwindigkeit v (m/sec) bewegter Körper K (Abb.50) erfährt, in folgender Form an

$$P = c \; F \; \frac{v^2 \gamma}{2\, g} \qquad \ldots\ldots \text{ Gl. 4}$$

Hierin bedeuten:

c ein dimensionsloser Beiwert,

F die Projektionsfläche des Körpers auf eine zur Richtung der Bewegung senkrechte Ebene ($m^2$),

$\gamma$ das spezifische Gewicht der Flüssigkeit ($kg/m^3$),

g die Beschleunigung der Schwere ($m/sec^2$).

Der N e w t o n 'sche Ansatz bedeutet demnach, daß der Widerstand der kinetischen Energie $m \frac{v^2}{2}$ der mit der Geschwindigkeit v bewegten Volumeneinheit der Flüssigkeit proportional gesetzt wird.

Die Gleichung 4 gilt, was für die späteren Betrachtungen zu beachten ist, zunächst nur für den wirklich stationären Zustand. Sie besteht jedoch auch für den quasistationären zu Recht. Dabei ist P dann allerdings nur als Mittelwert der Widerstandskraft über die Periode einer Schwingung aufzufassen. Die Gl. 4 hat aber z. B. noch keine Gültigkeit, wenn v nach einem Anlaufvorgang zwar schon konstant geworden, aber in der Flüssigkeit noch kein restloses Abklingen der Anlaufstörung erfolgt ist.

Die Größe des Beiwertes c ist aber nicht, wie N e w t o n vermutete, lediglich durch die geometrische Form des betrachteten Körpers allein gegeben, sondern meistens auch noch von der Geschwindigkeit und den Eigenschaften der Flüssigkeit abhängig.

Man könnte also zunächst annehmen, daß die exakte Erfassung des bei derartigen Bewegungsvorgängen auftretenden Widerstandes mit Rücksicht auf die Notwendigkeit der meßtechnischen Bestimmung des Einflusses zahlreicher Veränderlicher schwierig und sehr zeitraubend sein würde.

Die Ähnlichkeitsmechanik führt jedoch zur Erkenntnis, daß diese Abhängigkeit des Beiwertes von der absoluten Abmessung, den kinematischen Faktoren und den Stoffeigenschaften nicht eine beliebige sein kann. Die Größe c ist in Wirklichkeit, wenn man von den Einflüssen der Form des bewegten Körpers absieht, nur eine Funktion von sogenannten Kennziffern, die durch geeignete multiplikative Vereinigung einzelner der genannten Veränderlichen entstehen. Die zu wählende Gruppierung der Einzelvariabeln steht durch die für den Strömungsvorgang geltenden Differentialgleichungen fest+). Hierdurch ergeben sich wesentlich einfachere Abhängigkeiten für den Widerstandsbeiwert, da die Zahl der bestimmenden Kenngrößen immer kleiner ist, als die Anzahl der vorhandenen unabhängig Veränderlichen. Selbst wenn aber bei derartigen Vorgängen die Zahl der Kenngrößen gleich der Zahl der Veränderlichen wäre, bestünde immer noch der wesentliche Vorteil, daß bei einer funktionalen Darstellung in Abhängigkeit von Kenngrößen die inneren Zusammenhänge weit besser hervortreten, so daß eine Möglichkeit zu einer Verallgemeinerung experimentell gefundener Beziehungen vorhanden ist. Dies gilt nicht nur für die Hydrodynamik, sondern ganz allgemein für alle physikalischen Vorgänge, auf die die Ähnlichkeitsmechanik angewendet werden kann. Da von dieser im Zusammenhang mit den Rührproblemen auch sonst noch Gebrauch gemacht werden soll, erscheint es

---

+) Im Kapitel IIIc wird gezeigt, daß die Kenntnis der Differentialgleichung zum Auffinden der Kennziffern nicht unbedingt erforderlich ist.

zweckmäßig, einige Beispiele etwas eingehender zu behandeln.

Zunächst sei einmal angenommen, daß sich der Körper (Abb.50) in einer Flüssigkeit bewege, die entweder überhaupt keine freie Oberfläche besitze oder deren Spiegel vom Ort der Bewegung hinreichend weit entfernt sei, um nicht mehr durch die Strömung beeinflußt zu werden. In diesem Falle ist dann der (dimensionslose) Widerstandsbeiwert c der Gl.4 für alle geometrisch ähnlichen Körper beliebiger Größe lediglich nur noch eine (eindeutige) Funktion der sogenannten R e y n o l d s 'schen Kennzahl $\frac{v \cdot l}{\nu}$ +)

$$c = f\left(\frac{v \cdot l}{\nu}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{Gl. } 5 \; {}^{++)}$$

Hierin bedeuten:

$v$ die Geschwindigkeit des Körpers (m/sec),

$\nu$ die kinematische Zähigkeit $\frac{\eta g}{\gamma}$ (m²/sec)

$l$ eine die absolute Größe des Körpers kennzeichnende charakteristische Länge (m).

Hierzu sei folgendes bemerkt:

Der in der Gl.5 angedeutete Zusammenhang gilt nur für geometrisch ähnliche Formen des Körpers und des Strömungsraumes, der die Flüssigkeit begrenzt. Damit sind aber durch Angabe einer "charakteristischen" Länge $l$ +++) alle Ab-

---

+) Der Beweis ergibt sich aus den N a v i e r - S t o c k e s schen Gleichungen oder aus Dimensionsbetrachtungen (vergl. Kapitel IIIc).

++) Gl.5 gilt, solange sich die Geschwindigkeit nicht der Schallgeschwindigkeit in der Flüssigkeit allzu sehr nähert.

+++) z.B. bei Kugeln oder Zylindern der Durchmesser.

messungen völlig gegeben, da bei geometrisch ähnlichen Figuren die Angabe einer Länge zu ihrer Kennzeichnung ausreicht. Für diesen Fall der Bewegung besteht also trotz der vorhandenen drei unabhängigen und daher beliebig wählbaren Veränderlichen $l$, $v$, $\nu$ tatsächlich nur eine Abhängigkeit des Beiwertes $c$ von einer einzigen Variabeln, der R e y n o l d s 'schen Zahl. Hieraus ergeben sich bedeutende Vereinfachungen für die genaue Erfassung derartiger Vorgänge. Hierzu ein Beispiel:

Es soll für einen sich in der geschilderten Weise bewegenden Körper $K_h$ die Widerstandskraft $P_h$ ermittelt werden, die sich bei der Bewegung mit der Geschwindigkeit $v_h$ in einer Flüssigkeit von der kinematischen Zähigkeit $\nu_h$ einstellt. Die Abmessungen von $K_h$ ( gekennzeichnet durch die charakteristische Länge $l_h$ ) seien jedoch so gross, dass eine Bestimmung durch Versuche unmöglich ist +).

Für die Hauptausführung ( gekennzeichnet durch Index h ) gilt nach Gl. 4

$$P_h = c_h \, F_h \, \frac{v^2_h \, \gamma_h}{2 \, g} \qquad \ldots\ldots \text{Gl. } 6$$

Die Grösse von $P_h$ könnte also berechnet werden, wenn der Wert von $c_h$ bekannt wäre. Nun ist $c$ nach Gl. 2 eine eindeutige Funktion der R e y n o l d s 'schen Zahl $Re = \frac{v\,l}{\nu}$

Führt man daher mit einem geometrisch ähnlichen Körper $K_m$

---

+) Ein praktisch vorkommender Fall ist der Fahrwiderstand eines hinreichend tief eingetauchten Unterseebootes, oder der eines Segelflugzeuges.

kleinerer Abmessungen ( gekennzeichnet durch den Index m ) einen Modellversuch durch, bei dem die sich einstellende Widerstandskraft $P_m$ gemessen werden kann, dann sind die Widerstandsbeiwerte von $K_h$ und $K_m$ dann gleich, wenn

$$Re_h = Re_m$$

$$\frac{v_h \cdot l_h}{\nu_h} = \frac{v_m \cdot l_m}{\nu_m} \qquad \text{........ Gl. 7}$$

Für den Modellversuch liegt zwar meist $l_m$ ziemlich genau fest +). Die Grössen $v_m$ und $\nu_m$ sind jedoch frei wählbar ( die Modellflüssigkeit und die Geschwindigkeit können also andere sein, wie die der Hauptausführung ); die Bedingung der Gl. 7 ist demnach immer erfüllbar.

Für die ( gemessene ) Widerstandskraft des Modellversuchs $P_m$ gilt nun ebenfalls

$$P_m = c_m\, F_m\, \frac{v^2_m \cdot \gamma_m}{2\,g} \qquad \text{....... Gl. 8}$$

Da nach dem zuvor Gesagten $c_h$ und $c_m$ bei Erfüllung von Gl. 7 gleich gross sind, können die Gl. 6 und 8 unter Elimination von $c_m = c_h$ zusammengefasst werden. Man findet daraus den gesuchten Wert von $P_h$ mit dem gemessenen $P_m$ zu

$$P_h = P_m \,\frac{F_h}{F_m}\, \frac{v^2_h \cdot \gamma_h}{v^2_m\, \gamma_m}$$

Wegen der vorausgesetzten geometrischen Aehnlichkeit wird mit dem Längenmaßstab $m = \frac{l_h}{l_m}$ der Wert $\frac{F_h}{F_m}$ zu $m^2$; daraus folgt

die Endgleichung

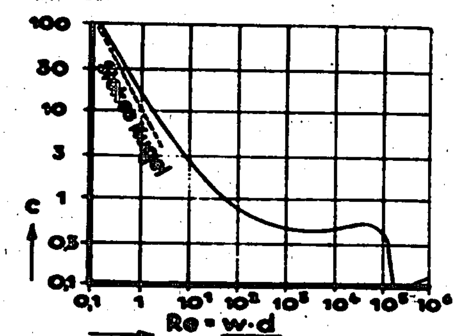
$$P_h = m^2 \; P_m \,\frac{v^2_h}{v^2_m}\, \frac{\gamma_h}{\gamma_m} \qquad \text{...... Gl.9}$$

---

+) Nach der oberen Grenze durch die Abmessungen der Versuchseinrichtung (Windkanal, Schleppkanal) nach unten durch die mit den kleiner werden Abmessungen sinkenden Messgenauigkeit.

Man kann daher in jedem Einzelfall den Widerstand nach Gl.6 unter den zuvor geschilderten Bedingungen durch geeignete Modellversuche ermitteln.

Besteht jedoch die Notwendigkeit, für Körper bestimmter Form öfter die Widerstände unter verschiedensten Bedingungen festzustellen+), so empfiehlt es sich, den Verlauf von c = f (Re) einmal durch eingehendere Modellversuche festzulegen. Die Aufgabe der Ermittlung des Widerstandes der Großausführung vereinfacht sich dann noch mehr: Man berechnet für den in Frage kommenden Fall die R e y n o l d s 'sche Zahl, entnimmt aus der Kurve c = f (Re) die Größe des Beiwertes und berechnet nach Gl.4 den Widerstand.



Beiwert c der Kugel nach Prandtl.
Abb.51.

Als Beispiel für eine Darstellung ist in Abb.51 der Wert von c als Funktion von Re für die Kugel gegeben++), die sich in einer nach allen Seiten hinreichend weit ausgedehnten Flüssigkeit

---

+) Sie besteht z.B. für Flugzeugtragflügel und deren Verstrebungen, für Unterseeboote, Torpedos usw.

++) Nach P r a n d t l (1) Bericht Nr.2 der Aerodynamischen Versuchsanstalt,Göttingen. Diese Gesetzmäßigkeit ist besonders für das Schlämmen, Sedimentieren und Sichten von Bedeutung.

Der linke Teil der doppelt logarithmisch aufgetragenen Kurve wird zu einer Geraden, die das Steigungsmaß (Tangente) -1 hat. Dies besagt, daß bei sehr kleinen Reynolds'schen Zahlen der Beiwert umgekehrt proportional der Reynolds'schen Zahl wird, d.h. der Widerstand ist der Geschwindigkeit verhältnisgleich. Die Gl.7 führt somit auf die Formel von S t o k e s für die Bewegung feiner Teilchen.

(oder einem Gas) befindet+).

Zur Bestimmung des Widerstandes berechnet man zunächst mit der kennzeichnenden Länge, für die in diesem Fall zweckmäßigerweise der Kugeldurchmesser d gewählt ist, die R e y n o l d s 'sche Zahl $\frac{v \cdot d}{\nu}$, entnimmt c aus dem Kurvenblatt und erhält

$$P = c \cdot \frac{d^2 \pi}{4} \frac{v^2 \gamma}{2g} \qquad \text{........ Gl.10}$$

Nun sind aber bei Rührvorgängen die Fälle selten, bei denen keine freie Oberfläche der Flüssigkeit im Gefäß besteht (entsprechend einer vollkommenen Ausfüllung des Rührgefäßes) oder bei denen durch das Rühren keine Beeinflussung des Flüssigkeitsspiegels mehr stattfindet. Infolgedessen ist also auch meistens der für die Bewegung des Rührers geltende Widerstandsbeiwert nicht nur eine Funktion der R e y n o l d s'schen Kennzahl allein. Die funktionale Abhängigkeit von der R e y n o l d s 'schen Kennzahl berücksichtigt zwar alle in der Flüssigkeit auftretenden Widerstandskräfte, die durch die Massenträgheit und die gegenseitige Reibung aller durch den bewegten Körper beschleunigten Flüssigkeitsteilchen hervorgerufen werden. Sowie jedoch durch die Bewegung ein vorhandener, freier Flüssigkeitsspiegel verformt wird, findet ein Heben von Volumenelementen gegen die Wirkung der Erdschwere

---

+) Bei allen derartigen Strömungsvorgängen ist der Bereich der praktisch in Frage kommenden R e y n o l d s 'schen Zahlen sehr groß. Es wird daher für die Wiedergabe der Zusammenhänge meist die doppelt logarithmische Darstellung der Gl.5 gewählt.

statt+), die also nun zusätzlich die Größe des Widerstandes beeinflussen muß.

Nun ist für solche Strömungsformen, die nahezu ausschließlich durch die Wirkung der Erdschwere beeinflußt werden, bekannt, daß sie dann einander hydrodynamisch ähnlich sind, wenn die sie charakterisierenden F r o u d e 'schen Kennzahlen $Fr = \frac{v^2}{l \cdot g}$ einander gleich sind++). Hierin bedeutet l wiederum jene charakteristische Länge, welche die Abmessung der betrachteten, geometrisch ähnlichen vorauszusetzenden Systeme kennzeichnet.

Betrachtet man beispielsweise die nahe an der Oberfläche einer Flüssigkeit sehr niedriger Viskosität unter starker Wellenbildung verlaufende Bewegung eines Körpers, so gilt für den Widerstand ebenfalls die Gl.4, jedoch mit dem Unterschied, daß c praktisch nur eine Funktion der F r o u de'schen Zahl ist

$$c = f\left(\frac{v^2}{gl}\right) \qquad \text{.......... Gl.11}$$

Daraus folgt aber ohne weiteres für Vorgänge, bei denen weder die innere Reibung noch die Erdschwere zu vernachlässigen sind, die Gültigkeit der Gl.1 mit der Bedingung, daß der Widerstandsbeiwert eine Funktion der R e y n o l d s'schen und F r o u d e 'schen Kennzahl sein muß+++).

+) In einer allseitig von festen Wänden umschlossenen Flüssigkeitsmasse wirkt dem Heben eines Flüssigkeitsteilchens nur die innere Reibung entgegen, da es dasselbe spez.Gewicht wie das der Umgebung besitzt.

++) Das F r o u d e'sche Modellgesetz ist für die Theorie der Kreiselpumpen und Turbinen von großer Bedeutung.

+++) Wäre außerdem die Oberflächenspannung auf den Leistungsbedarf von Bedeutung, so müßte in Gl.12 noch eine dritte Kenngröße eingeführt werden (vergl.hierzu Kapitel IIIc).

$$c = f\,(Re, Fr) = f\left(\frac{vl}{\nu}, \frac{v^2}{gl}\right) \qquad \ldots\ldots \text{Gl. 12}$$

Die Größe der Widerstandskraft, die ein Rührer bei der Bewegung erleidet und demnach auch der Leistung, die zur Aufrechterhaltung der Rührbewegung erforderlich ist, sind daher ebenfalls durch Modellversuche feststellbar. Die eigentliche Leistung L (s. Gl. 1) kann sogar für Rührgefäße bestimmter geometrischer Form und beliebiger Abmessung rein rechnerisch ermittelt werden, wenn an einem oder mehreren Modellen mit verschiedenen Flüssigkeiten der funktionale Zusammenhang $c = f\,(Re, Fr)$ einmal für den praktisch in Frage kommenden Bereich durch Versuche bestimmt wurde. Mit der Erkenntnis dieser Gesetzmäßigkeit und ihrer experimentellen Bestätigung ist aber die Grundlage für die Aufstellung von Rechentafeln geschaffen, die es dem Konstrukteur und Betriebsingenieur gestatten, die Antriebsleistung von Rührwerken im voraus zu ermitteln, wenn das spez. Gewicht und die Viskosität der zu verarbeitenden Flüssigkeiten bekannt sind.

Zunächst sollen die Regeln für die Durchführung derartiger Modellversuche entwickelt werden. Wie zuvor bezeichnen die Indizes "h" und "m" die entsprechenden Größen der Hauptausführung bzw. die des (kleineren) Modells und $m = \frac{l_h}{l_m}$ das Maßstabsverhältnis.

Auch in dem jetzt betrachteten allgemeinen Fall gilt die Gleichung 9; Voraussetzung für die hydrodynamische Ähnlichkeit ist jedoch, daß beim Modellversuch entsprechend Gl. 9 sowohl die Bedingung $Re_h = Re_m$ als auch $Fr_h = Fr_m$ erfüllt ist.

$$\frac{v_h \cdot l_h}{\nu} = \frac{v_m \cdot l_m}{\nu} \qquad \text{Gl. 13}$$

$$\frac{v_h^2}{g \cdot l_h} = \frac{v_m^2}{g \cdot l_m} \qquad \text{Gl. 14}$$

nun folgt aus Gl. 14

$$\frac{v_h}{v_m} = \sqrt{\frac{l_h}{l_m}} = \sqrt{m} \qquad \text{Gl. 15}$$

und aus Gl. 13

$$\frac{v_h}{v_m} = \frac{l_m}{l_h} \; \frac{\nu_h}{\nu_m} \qquad \text{Gl. 16}$$

Durch Vereinigung von Gl. 15 und 16 findet man:

$$\nu_m = \frac{\nu_h}{m\sqrt{m}} \qquad \text{Gl. 17,}$$

worin wie zuvor für $\frac{l_h}{l_m}$ das geometrische Maßstabsverhältnis m eingeführt wurde. Man findet somit einen wesentlichen Unterschied für die Durchführung der Modellversuche bei Vorgängen mit und ohne Beeinflussung der freien Oberfläche der Flüssigkeit.

Ist der Widerstandsbeiwert entweder eine Funktion der R e y n o l d s'schen oder F r o u d e 'schen Kennzahl, so kann jede beliebige, rein viskose Flüssigkeit für den Modellversuch verwendet werden. Die Modellgeschwindigkeit ist dann nur entsprechend auszuwählen, daß die durch die Kenngrößen gegebene Bedingung erfüllt wird.

Sowie e jedoch sowohl von der R e y n o l d s' schen wie auch der F r o u d e 'schen Zahl abhängt, liegt die Modellgeschwindigkeit und die kinematische Viskosität der Modellflüssigkeit fest. Man kann daher im allgemeinen den Modellversuch nicht mehr mit derselben Flüssigkeit ausführen, die bei der Hauptausführung Verwendung finden soll, es sei denn, daß beim Modellversuch durch eine geeignet gewählte andere Temperatur die Bedingung nach Gl.17 noch zu verwirklichen ist.

Bei dem betrachteten Bewegungsfall kann die Gl.9 mit Rücksicht auf Gl.15 auch in der Form

$$P_h = m^3 \cdot P_m \frac{\gamma_h}{\gamma_m}$$

geschrieben werden. Die zur Bewegung in der Zeiteinheit erforderliche Arbeit, d.h. den Leistungsaufwand zur Aufrechterhaltung der stationären Geschwindigkeit erhält man durch Multiplikation der Widerstandskraft mit dem in der Zeiteinheit zurückgelegten Weg, d.h. der Geschwindigkeit:

$$L_h = P_h \cdot v_h = m^3 \; P_m \; \frac{\gamma_h}{\gamma_m} \; v_h$$

Nun ist aber $P_m = \frac{L_m}{v_m}$ ; somit ergibt sich

$$L_h = m^3 \; L_m \; \frac{\gamma_h}{\gamma_m} \; \frac{v_h}{v_m} \quad \cdot \text{ oder mit Gl.15}$$

$$L_h = m^{3,5} \; \frac{\gamma_h}{\gamma_m} \; L_m \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ Gl.18.}$$

Dies ist rein äußerlich betrachtet nur das F r o u d e 'sche Modellgesetz. Bedenkt man aber, daß die Modellflüssigkeit mit Rücksicht auf Gl.17 ausgewählt werden muß, so ist zu verstehen, warum in Gl.15 gleichzeitig auch noch das R e y - n o l d s 'sche Modellgesetz erfüllt ist.

Die Gleichungen 13 - 18 enthalten somit die Bedingungen, die bei der Durchführung eines einzelnen Modellversuches zur Ermittlung des Leistungsbedarfes der Großausführung zu beachten sind. Mit Rücksicht auf die Tatsache, daß doch meist ähnliche Rührgefäße Verwendung finden, ist die einmalige Ermittlung der Widerstandsbeiwerte für bestimmte Bauformen rätlicher, da sie, wie schon erwähnt, in vielen Fällen dann die rechnerische Behandlung zuläßt.

b) Die Entwicklung der Rührerformel.

Bei der Bewegung des Rührers entstehen auf beiden in der Bewegungsrichtung liegenden Oberflächen der Flügel Druckkräfte, während sich auf den Rückseiten sogar Unterdrücke ausbilden können. Zu diesen treten noch die Scherkräfte, die bei der Bewegung ebenfalls überwunden werden müssen.

Wie bei allen derartigen hydrodynamischen Vorgängen ist es auch hier zulässig, diese Kräfte zu einer Resultierenden zu vereinigen, die an einer beliebigen Stelle des Rührers angreifend gedacht werden kann. Diese Kraft (Abb.52) muß nur die Bedingung erfüllen, daß sie, mit ihrem Hebelarm multipliziert, dasselbe Drehmoment an der Welle hervor-

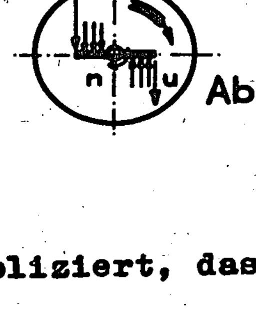


Abb. 52.

bringt, wie alle Einzelkräfte zusammen.

Für diese den Bewegungswiderstand des Rührers kennzeichnende Kraft gelten dieselben Gesetzmässigkeiten, wie sie im Abschnitt zuvor genauer entwickelt wurden.

$$P = c\,F \frac{v^2 \gamma}{2g}$$

und damit die Leistung L

$$L = c\,F \frac{v^3 \gamma}{2g}$$

worin v die Umfangsgeschwindigkeit des Punktes bedeutet, an dem die Kraft P wirkend gedacht ist. Nach Gl. 4 ist für F die Projektionsfläche des Rührers senkrecht zur Bewegungsrichtung einzusetzen. Bei dem in Abb. 52 dargestellten Fall des Rührblattes kann man also unmittelbar das Produkt d.h aus Durchmesser und Höhe einführen +). Nimmt man an, die Kraft wirke am äussersten Umfang des Rührers, dessen Geschwindigkeit u sei, so gilt nunmehr

$$L = c\,d\,h \frac{u^3 \gamma}{2g} \quad \text{mkg/sec} \qquad \ldots\ldots\ \text{Gl. 19}$$

---------

+) Nach den oben wiedergegebenen Zusammenhängen kann mit gleichem Recht auch für F die Grösse $d^2$, oder überhaupt das Quadrat irgendeiner kennzeichnenden Länge eingeführt werden, da diese Formel nur für geometrisch ähnliche Anordnungen gilt. Die Einführung einer anderen Fläche hat nur eine Aenderung des Beiwertes c um einen konstanten Faktor zur Folge. Wenn trotzdem das Produkt aus Rührerdurchmesser und Rührerhöhe eingeführt wird, so geschieht dies aus Gründen, auf die bei der Behandlung der experimentellen Ergebnisse genauer eingegangen werden soll. Auf keinen Fall besagt die Verwendung der Fläche d.h, dass die Rührerleistung nur von der Grösse dieses Produktes, nicht aber von den beiden Veränderlichen d und h für sich abhängig ist.

Zur Vereinfachung des Gebrauches der Gl.19 ersetzt man zweckmäßigerweise die Umfangsgeschwindigkeit u durch die Zahl der Umdrehungen in der Minute n

$$u = \frac{\pi d n}{60}$$

Führt man $g = 9{,}81\ m/sec^2$ in Gl.19 ein, so gilt dann

$$L = \frac{1}{60^3 \cdot 75 \cdot 1{,}36 \cdot 2 \cdot 9{,}81}\ c\ d^4 h n^3 \gamma$$

$$L = c\ 7{,}17 \cdot 10^{-5}\ d^4 h\ n^3 \gamma \qquad \text{in Watt} \ldots.\ 20.$$

Eine Berechnung von L ist somit möglich, wenn c für ein System als Funktion von Re und Fr vorliegt.

### c) Die Ermittlung der Leistung für das Rühren pastenartiger Stoffe.

Unter den Produkten, die in Rührwerken zur Verarbeitung gelangen, überwiegen zwar diejenigen, die als rein viskose Flüssigkeiten anzusprechen sind. Trotzdem ist die Zahl der Stoffe nicht gering, die beim Fließen durch enge Rohre dem Poiseuillesche Gesetz nicht folgen. Dies gilt besonders dann, wenn man die für die Durchmischung von Körpern hoher Konsistenz meist verwendeten Kneter mit in Betracht zieht.

Das hydrodynamische Verhalten solcher Stoffe ist, wenn man von Untersuchungen über das Strömen in Kapillaren und den Messungen von Scherkraftgrößen absieht+), kaum geklärt. Abgesehen von ganz einfachen Fällen++) ist daher auch von einer rechnerischen Verfolgung des Leistungsbedarfes wenig zu erhoffen, umsomehr, da nach eingehenden mathematischen Unterschungen von M a t z - Höchst schon bei den einfacheren, rein viskosen Flüssigkeiten wenig Aussicht auf Erfolg besteht. Eine Klärung der für die jetzt zu betrachtenden Stoffe geltenden Zusammenhänge ist daher praktisch nur durch Verwendung der Ähnlichkeitsmechanik möglich. Unter der großen Zahl der Produkte, die nicht mehr dem Poiseuillischen Gesetz gehorchen, sind die "plastischen" im vorliegenden Fall von großer Bedeutung. Es handelt sich hierbei um an sich feste Körper, die sich unter dem Einfluß hinreichend kleiner Kräfte nur elastisch verformen, die aber bei der Einwirkung größerer Kräfte nach dem Überschreiten der "Fließspannung" in ähnlicher Weise wie rein viskose Flüssigkeiten zu strömen beginnen. Zu dieser Klasse sind auch sehr viele Stoffe (z.B. dünne Suspensionen) zu rechnen, die bei oberflächlicher Beobachtung "flüssig" zu sein scheinen. Diese sind als plastische Körper aufzufassen, bei denen bereits unter der Einwirkung der Erdschwere die Fließspannung überschritten ist.

---

+) Eine Zusammenfassung des bisherigen Schrifttums und einiger mathematischer Ansätze gibt R e i n e r . (Zur Hydrodynamik der Kolloide, Z.f.angew.Math.u.Mech.10 (1930) S.400) vergleiche hierzu auch K i e ß k a l t "Eigenschaften und Bearbeitung von Filterpreßkuchen und Farbstoffpasten". Vortrag auf der Arbeitstagung "Endstufenverfahren" am 22./23.5.36 in Höchst.

++) z.B. Verarbeitung zwischen zwei koaxialen Zylindern, von denen einer rotiert.

Für die Erfassung der hydrodynamischen Eigenschaften dieser Stoffe ist im allgemeinen die Anordnung einer großen Zahl von Stoffbeiwerten erforderlich, während im Gegensatz dazu bei den rein viskosen Flüssigkeiten nur die Notwendigkeit zur Kenntnis des spez. Gewichtes und der Zähigkeit besteht. Eine besondere Erschwerung bedeutet, daß diese Konstanten vielfach nicht nur eine Funktion von Druck und Temperatur allein sind, sondern auch von der "Vorgeschichte" des Stoffes abhängen oder in ihrer Größe durch die Höhe der örtlich bestehenden Geschwindigkeitsgefälle (z.B. bei thixotropen Körpern) beeinflußt werden+). Glücklicherweise gehorchen jedoch eine große Zahl von Produkten, die in Rührwerken und Knetern, auf Walzen und Pressen zur Verarbeitung gelangen, hinsichtlich der in ihrem Innern auftretenden Schubspannungen $\sigma$ dem relativ einfachen Ansatz

$$\sigma = \tau + \eta' \frac{\partial v}{\partial s} \qquad \text{........ Gl. 21}$$

zur Kennzeichnung ihres hydrodynamischen Verhaltens. Hierin bedeutet $\tau$ die "Fließspannung", (kg/m$^2$) deren Größe zunächst einmal überschritten werden muß, damit überhaupt eine Bewegung entsteht, $\eta'$ einen der dynamischen Viskosität dimensionsgleichen "Gleitmodul" und $\frac{\partial v}{\partial s}$ das in senkrechter Richtung zum Fließweg s bestehende Gefälle der Geschwindigkeit $v$.

Die beiden Werte $\tau$ und $\eta'$ sind zunächst einmal temperatur- und druckabhängig. Der Einfluß der "Vorgeschichte" äußert sich meist in dem Sinne, daß beide Konstanten durch die Einwirkung dauernder Verformungen, deren Beginn auch zeit-

+) Es ist dies durch das Vorhandensein eines Gefüges bedingt, dessen Beschaffenheit durch Einwirkung eines Scherkraftfeldes dauernd oder vorübergehend beeinflußt werden kann.

lich zurückliegen kann, asymptotisch Mindestwerten zustreben.

Die plastischen Stoffe - weiterhin als Pasten bezeichnet - haben in ihrem Verhalten gegenüber den rein viskosen Flüssigkeiten folgenden grundlegenden Unterschied:

Bei den Flüssigkeiten hat jede auf sie einwirkende Kraft, sei sie noch so klein, eine Formänderung zur Folge, die auch nach dem Aufhören der Krafteinwirkung bestehen bleibt. Im Gegensatz dazu geben hinreichend kleine Kräfte bei Pasten nur elastische Verformungen, die beim Aufhören der Einwirkung wieder verschwinden (Relaxation)+). Daher zeigen sich bei der Messung der von Rührwerken benötigten Drehmomente zwischen beiden Klassen folgende grundsätzliche Abweichungen:

Bei Flüssigkeiten geht die Kurve, die den Zusammenhang zwischen Moment und Drehzahl wiedergibt, stets durch den Nullpunkt. Bei Pasten besitzt das Drehmoment im Nullpunkt der Drehgeschwindigkeit einen endlichen Wert, da zur Aufrechterhaltung einer noch so geringen Verformungsgeschwindigkeit immer eine endliche Kraft erforderlich ist.

Besondere Beachtung verdient, daß sich bei der Verarbeitung von Pasten in ihrem Innern Zonen ausbilden können, bei denen die Fließspannung nicht überschritten wird, in denen also keine Bewegung herrscht. Für die Vermischung derartiger Stoffe besitzt somit eine zweckmäßige Gestaltgebung der Gefäße und Rührer eine erhöhte Bedeutung.

---

+) Bei sehr kurzer Einwirkung von Kräften haben auch eine Reihe von rein viskosen Flüssigkeiten diese Eigenschaft. Für die behandelten Probleme ist dies jedoch ohne Bedeutung.

Wendet man Gl.21 auf die Strömung in kreisrunden Kapillaren an, so ergibt sich für die in der Zeiteinheit ausströmende Menge Q/t ($m^3$/sec) die Beziehung+)

$$\frac{\pi r^4 \Delta p}{8 \eta l}\left[1-\frac{8}{3}\,\frac{\tau l}{r \Delta p}+\frac{16}{3}\left(\frac{\tau l}{r \Delta p}\right)^4\right] \qquad \text{..... Gl. 22}$$

Hierin bedeuten außer den bereits genannten Größen:

$r$ den Radius der Kapillare (m),

$l$ die Länge der Kapillare (m),

$\Delta p$ die auf die Länge $l$ wirksame Druckdifferenz (kg/$m^2$).

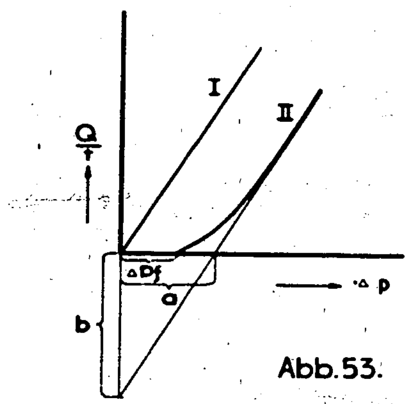



Abb.53.

In Abb.53 ist die Form des Verlaufes dieser Funktion in Abhängigkeit von der treibenden Druckdifferenz $\Delta p$ wiedergegeben. Während eine rein viskose Flüssigkeit in dieser Art der Darstellung eine Gerade (I) liefert (Poiseuillesches Gesetz), ergibt Gl.22 eine Kurve 4. Ordnung (II). Der Beginn des Fliessens erfolgt bei derjenigen Druckdifferenz $\Delta p_f$, bei der die auf die Kapillarenfüllung von oben wirkende Kraft $\Delta p_f \cdot \pi \cdot r^2$ der an den Wandungen entgegenwirkenden Fließkraft $2 \pi r \tau$ das Gleichgewicht hält. Daraus folgt $\Delta p_f = \frac{2 \tau l}{r}$. Für die beiden in den zugehörigen Maßstäben gemessenen Asymptoten-

---

+) Nach B u c k i n g h a m (On Plastic Flow through Capillary Tubes, Proceedings of the American Society for Testing Materials, 39, (1926), S.80).

abschnitte a und b gilt

$$a = \frac{8\tau l}{3r} \qquad b = \frac{\pi r^4 \alpha}{8\eta' l}$$

und somit

$$\left.\begin{aligned} \tau = \frac{3\alpha r}{8 l} \qquad \eta' = \frac{\pi \alpha r^4}{8 b l} \end{aligned}\right\} \quad \text{....Gl.23}$$

Es besteht also eine einfache Methode +) für die Ermittlung der Beiwerte:

Man bestimmt das durch eine kalibrierte Kapillare ++) in der Zeiteinheit unter dem Einfluss verschieden grosser Druckunterschiede ausströmende Flüssigkeitsvolumen, trägt dieses über der Druckdifferenz auf und zieht die Asymptote. Die Grösse von $\tau$ und $\eta'$ ergibt sich dann aus den Beziehungen der Gl. 23. Eine Ermittlung der Scherfestigkeit $\tau$ durch Messung des Fliessdruckes $p_f$ ist weniger rätlich, da diese Grösse nie genau genug bestimmt werden kann.

## d) Die Bestimmung der Aehnlichkeitsgesetze für einfache plastische Stoffe.

Für die Ermittlung der Kenngrössen, die den

---

+) Ueber die Möglichkeit zur Verwendung des Farinographen der Firma Brabender-Duisburg für die Ermittlung dieser Beiwerte vgl. Büche "Die Eignung des Farinographen zur Bestimmung der Fliessbeiwerte von Pasten" Bericht No.166 der Versuchsgruppe Lu.

++) Die Kalibrierung kann beispielsweise durch eine Eichung mit einer rein viskosen Flüssigkeit bekannter Zähigkeit erfolgen.

Strömungszustand solcher plastischer Stoffe, die dem Ansatz nach Gl. 21 gehorchen, soll die ebenso einfache wie elegante Methode von W e b e r +) benützt werden. Dieses sich lediglich auf Dimensionsbetrachtungen stützende Verfahren, das auch M a t z - Höchst für die Untersuchung des Verhaltens rein viskoser Flüssigkeiten verwendete, gestattet nicht nur den exakten Beweis für die Berechtigung einer Verwendung der bereits eingeführten Kenngrößen, sondern auch die Auffindung neuer, die für das Verhalten der Pasten maßgebend sind. Es erscheint zweckmäßig, die W e b e r 'sche Ableitung ausführlicher zu behandeln, da sie nicht nur auf dem Gebiet der Hydromechanik, sondern ganz allgemein überall dort zur Auffindung von dimensionslosen Kenngrößen führt, wo einzelne, dimensionsbehaftete Veränderliche einen durch sie bedingten physikalischen Vorgang nicht völlig unabhängig voneinander beeinflussen, sondern eine Abhängigkeit von Variabelngruppen besteht.

Ein großer Vorteil dieser Methode ist, daß diese Kenngrößen, die nach dem früher Ausgeführten eine weitgehende Verallgemeinerung einzelner auf experimentellem Wege gefundener Zusammenhänge ermöglichen, ohne die Aufstellung der für den betrachteten Vorgang geltende Differentialgleichung ermittelt werden können.

Zur Erläuterung des W e b e r 'schen Verfahrens wurde wieder der Fall eines sich in einer nachgiebigen Materie bewegenden Körpers behandelt. Im Gegensatz zu dem früheren

---

+) W e b e r, Vortrag über Ähnlichkeitsphysik, Jahrb. d. Schiffsbautechn. Ges. 1930.

Beispiel sei jedoch angenommen, daß auf den Bewegungswiderstand P (kg) (vergl. Abb. 50) sowohl die Trägheitskräfte, die Zähigkeitskräfte, die Erdschwere, die Fließfestigkeit und die Oberflächenspannung von Einfluß sind. Um P also in jedem Falle angeben zu können, muß die Funktion

$$P = P(l, h, v, \eta', \gamma, g, \tau, \alpha)$$

bekannt sein. Im impliziter Form lautet sie

$$f(P, l, h, v, \eta', \gamma, g, \tau, \alpha) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{Gl. 24.}$$

Hierin bedeutet wiederum $\ell$ die "kennzeichnende" Länge des bewegten Körpers, h den Abstand von der Flüssigkeitsoberfläche und $\alpha$ die Oberflächenspannung in kg/m. Bestünden keine Kenngrößen, die unter diesen neun Variabeln Zusammenhänge festlegen, so müßte der Verlauf von P rechnerisch oder experimentell in Abhängigkeit von allen Veränderlichen ermittelt werden. Zum Nachweiß des Vorhandenseins einer funktionalen Abhängigkeit von Gruppenveränderlichen, die durch multiplikative Vereinigung einzelner Variabeln erhalten werden, entwickelte W e b e r folgenden Gedankengang:

Die Gl. 24 behält auch ihre Gültigkeit, wenn man statt jeder einzelnen Variabeln ein Produkt aus dieser Veränderlichen mit einer beliebigen Anzahl der anderen, sonst noch vorkommenden oder auch mit sich selbst, einführt.

Die Gültigkeit dieser Annahme besteht auch weiter, wenn diese zusätzlichen Veränderlichen zu einer beliebigen Potenz erhoben werden. Bezeichnet beispielsweise u eine der ursprünglichen Veränderlichen während x, y, z andere im der Gleichung vorkommende Variable bedeuten sollen, so kann demnach an Stelle von u auch

$$u \cdot x^a \cdot y^b \cdot z^c$$

eingeführt werden. Dabei steht die Wahl der Exponenten a, b, c in völlig freiem Belieben. Sucht man nun die Variabeln x,y,z derart aus, daß in ihnen die drei Grundeinheiten des gewählten Maßsystems vorkommen (Länge, Kraft, Zeit im technischen, Länge, Masse, Zeit im physikalischen System), so können a,b,c immer so ausgewählt werden, daß das Produkt $u\, x^a\, y^b\, z^c$ dimensionslos wird+).

Die Ermittlung der Exponenten ist sehr einfach, wie an der rechnerischen Weiterverfolgung der Gl.24 gezeigt werden soll. Im vorliegenden Falle wählt man zweckmäßigerweise als zusätzliche Veränderliche die Größen x = l (m), y = P (kg) z = v (m/sec). Dann lautet die erste Kenngröße

$$K_1 = P \cdot l^a\, P^b\, v^c$$

In Dimensionsform geschrieben gilt:

$$[K_1] = kg^1 \cdot m^a\, kg^b\, m^c \quad sec^{-c} \qquad ^{++)}$$

+) Allgemeiner gesagt, muß die Zahl der zusätzlichen Veränderlichen gleich der Anzahl der Grundeinheiten des Maßsystems sein, um dimensionslose neue Veränderliche - Kennzahlen - einführen zu können. Bei der Ermittlung von Ähnlichkeitsbezeichnungen auf dem Gebiete des Wärmeübergangs führt man zweckmäßigerweise als neue Grundeinheiten Wärmemenge und Temperatur ein; demnach sind dort fünf mit beliebig wählbaren Exponenten versehene Veränderliche notwendig. Es ist leicht einzusehen, daß n ursprünglich vorhandenen Variabeln n - g Kennziffern entsprechen müssen, wenn g die Zahl der Grundeinheiten des Maßsystems ist.

++) Der Ausdruck [ ] bedeutet, daß nur Dimensionen angeschrieben werden.

Die Größe wird also offensichtlich nur dann dimensionslos, wenn die Summen der Exponenten jeder für sich betrachteten Grundeinheit zu Null werden.

$$1 + b = 0 \qquad \text{d.h.} \quad b = -1$$
$$a + c = 0 \qquad a = 0$$
$$-c = 0 \qquad c = 0$$

Setzt man die Werte von a, b, c wieder in die Ausgangsgleichung ein, so folgt daraus

$$K_1 = P\,\ell^a\,P^b\,v^c = P \cdot P^{-1} = 1$$

Die Kenngröße $K_1$ enthält also überhaupt keine Veränderlichen mehr, d.h. sie scheidet für die weiteren Betrachtungen aus. In der gleichen Weise gilt für $K_2$

$$K_2 = \ell \cdot \ell^a\,P^b\,v^c$$

$$[K_2] = m^1\;m^a\;kg^b\;m^c\;sec^{-c}$$

$$1 + a + c = 0 \qquad \text{d.h.} \quad a = -1$$
$$b = 0 \qquad b = 0$$
$$c = 0 \qquad c = 0$$

Daraus folgt

$$K_2 = l \cdot l^{-1} = 1$$

Die Kenngröße $K_2$ ist daher ebenfalls ohne Einfluß auf den betrachteten Vorgang. Für $K_3$ gilt

$$K_3 = h\;l^a\;P^b\;v^c$$

$$[K_3] = m^1\;m^a\;kg^b\;m^c\;sec^{-c}$$

und damit wie zuvor

$$K_3 = h \cdot l^{-1} = \frac{h}{\ell}$$

Für $K_4$ gilt

$$K_4 = v \, \ell^a \, p^b \, v^c$$

$$[K_4] = m^1 \; sec^{-1} \; m^a \; kg^b \; m^c \; sec^{-c}$$

$$\begin{aligned} 1 + a + c &= 0 & \text{d.h.}\quad a &= 0 \\ -1 - c &= 0 & c &= -1 \\ b &= 0 & b &= 0 \end{aligned}$$

$$K_4 = v \cdot v^{-1} = 1$$

Die Kenngröße $K_4$ verschwindet somit ebenfalls.

Für $K_5$ gilt mit der Dimension $\frac{kg\ sec}{m^2}$ für

$$K_5 = \eta' \ell^a \, p^b \, v^c$$

$$[K_5] = kg^1 \; sec^1 \; m^{-2} \; m^a \; kg^b \; m^c \; sec^{-c}$$

$$\begin{aligned} 1 + b &= 0 & \text{d.h.}\quad b &= -1 \\ 1 - c &= 0 & c &= +1 \\ -2 + a + c &= 0 & a &= +1 \end{aligned}$$

und somit

$$K_5 = \eta' \ell^1 \; p^{-1} \; v^1 = \frac{\eta' \, l \, v}{p}$$

Für $K_6$ gilt mit $\gamma$ (kg/m³)

$$K_6 = \gamma \, \ell^a \, p^b \, v^c$$

$$[K_6] = kg^1 \; m^{-3} \; m^a \; kg^b \; m^c \; sec^{-c}$$

$$\begin{aligned} 1 + b &= 0 & \text{d.h.}\quad b &= -1 \\ -3 + a + c &= 0 & a &= +3 \\ -c &= 0 & c &= 0 \end{aligned}$$

demnach ist

$$K_6 = \gamma \cdot l^3 \; p^{-1} = \frac{\gamma \cdot l^3}{p}$$

Für $K_7$ gilt mit g $\left(\frac{m}{sec^2}\right)$

$$K_7 = g \; l^a \; p^b \; v^c$$

$$[K_7] = m^1 \; sec^{-2} \; m^a \; kg^b \; sec^{-c}$$

$$1 + a + c = 0 \qquad \text{d.h.} \quad a = +1$$

$$-2 - c = 0 \qquad c = -2$$

$$b = 0 \qquad b = 0$$

und daraus

$$K_7 = g \cdot l^1 \; v^{-2} = \frac{g\,l}{v^2}$$

Für $K_8$ gilt mit $\tau$ (kg/m$^2$)

$$K_8 = \tau \; l^a \; p^b \; v^c$$

$$[K_8] = kg^1 \; m^{-2} \; m^a \; kg^b \; m^c \; sec^{-c}$$

$$1 + b = 0 \qquad \text{d.h.} \quad b = -1$$

$$-2 + a + c = 0 \qquad a = +2$$

$$c = 0 \qquad c = 0$$

und somit

$$K_8 = \tau \cdot l^2 \; p^{-1} = \frac{\tau\, l^2}{p}$$

Für $K_9$ gilt mit $\alpha$ (kg/m)

$$K_9 = \alpha \; l^a \; p^b \; v^c$$

$$[K_9] = kg^1 \; m^{-1} \; m^a \; kg^b \; m^c \; sec^{-c}$$

$$1 + b = 0 \qquad \text{d.h.} \quad b = -1$$

$$-1 + a + c = 0 \qquad a = +1$$

$$c = 0 \qquad c = 0$$

und somit

$$K_9 = \alpha \, \ell^{1} \quad P^{-1} \quad = \frac{\alpha \ell}{P}$$

und daraus folgt die neue Gleichung

$$f\,(K_3,\ K_5,\ K_6,\ K_7,\ K_8,\ K_9) \quad = \quad 0$$

oder

$$f\left(\frac{h}{\ell}\ ;\ \frac{\eta' \ell v}{P}\ ;\ \frac{\gamma \ell^3}{P}\ ;\ \frac{g \ell}{v^2}\ ;\ \frac{\tau \ell^2}{P}\ ;\ \frac{\alpha \ell}{P}\right) \quad = 0 \ \ldots \ \text{Gl.}25$$

Man ersieht daraus, daß sich also die Zahl der Veränderlichen von ursprünglich 9 (Gl.24) auf 6, also um die Zahl der drei Grundeinheiten vermindert hat.

Da ein Zusammenhang zwischen dem Widerstand P und den sonstigen Variabeln gesucht wird, ist es notwendig, Gl.25 so umzuformen, daß nur noch in einer Kenngröße P auftritt. Die funktionale Abhängigkeit von P ergibt sich dann aus der Auflösung von Gl.25 nach dieser Größe.

Die genannte Umformung ist in einfacher Weise möglich, da für die Vereinigung von Kenngrößen dasselbe gilt, wie für die einzelnen Veränderlichen: Man kann an Stelle der Kenngröße $K_m$ auch das Produkt $K_m \cdot K_n$ sowie $\frac{1}{K_m}$ einführen, ohne daß hierdurch die Möglichkeit zu einer funktionalen Darstellung des betrachteten physikalischen Vorganges unterbunden ist.

So liefert z.B.

$$\frac{K_6}{K_5 \cdot K_7} = K_5' = \frac{v \cdot l}{\nu'}$$

worin $\frac{\eta' g}{\gamma} = \nu'$ gesetzt ist.

Weiterhin ergibt $K_7/K_6 = K_6' = \frac{P\,g}{\gamma\,l^2\,v^2}$

$$K_7 = \frac{\ell}{K_7} = \frac{v^2}{g\,\ell}$$

und

$$K_8/K_5 = \frac{\tau\,\ell}{\eta'\,v} = K'_8$$

Man erhält aus $K_9/K_6$

$$K_9' = \frac{\alpha}{\gamma \cdot \ell^2}$$

Mit diesen neuen Beziehungen lautet nunmehr die Gl. 25

$$f\,(K_3,\ K_5',\ K_6',\ K_7',\ K_8',\ K_9') = 0$$

$$f\,\left(\frac{h}{l};\ \frac{v\ell}{\gamma'};\ \frac{P\ g}{\gamma\ell^2 v^2};\ \frac{v^2}{g\,\ell};\ \frac{\tau\,\ell}{\eta' v};\ \frac{\alpha}{\gamma\,\ell^2}\right) = 0$$

Löst man diese Gleichung nach $K_6'$ auf, so ergibt sich

$$\frac{P\ \ g}{\gamma\,\ell^2 v^2} = F\left(\frac{h}{\ell};\ \frac{v\,\ell}{\gamma'};\ \frac{v^2}{g\,\ell};\ \frac{\tau\ell}{\eta v}\ \ \frac{\alpha}{\gamma\,\ell^2}\right) \text{ d.h.}$$

$$P = \underbrace{F\left(\frac{h}{\ell}\ \frac{v\,\ell}{\gamma'}\ \frac{v^2}{g\,\ell}\ \frac{\tau\,\ell}{\eta' v}\ \frac{\alpha}{\gamma\,\ell^2}\right)}_{C}\ \frac{\gamma}{g}\ \ell^2\ \ v^2 \quad \ldots \text{ Gl. 26}$$

Es ist dies nichts anderes als Gl. 4, in der sich C von c nur durch den Faktor 1/2 unterscheidet+); die zur Aufrechterhal-

---

+) Sieht man vom Vorhandensein der Kenngrößen $K_8$ und $K_9$ ab (rein viskose Flüssigkeiten), so liefert also die Dimensionsbetrachtung nach W e b e r , bei der lediglich die Kenntnis der den betrachteten Vorgang beeinflussenden Variabeln vorausgesetzt sind, dieselben Ähnlichkeitsbeziehungen wie wenn man von der Differentialgleichung ausgeht, die ein Wissen um den mechanischen, d.h. mathematisch formulierenden Verlauf des Vorganges zur Bedingung hat. Daraus kann die zunächst doch merkwürdig erscheinende Tatsache gefolgert werden, daß bei einem physikalischen Vorgang, der von einer Reihe dimensionsbehafteter Veränderlichen abhängt, von vornherein auch schon eine funktionale Abhängigkeit von Variabelngruppen besteht, zu deren Feststellung ein Wissen um die zeitlichen und örtlichen Änderungen der Geschehnisse nicht erforderlich ist.

tung der Bewegung erforderliche Leistung findet man in gleicher Weise durch Multiplikation mit der Geschwindigkeit v.

Die Ermittlung des funktionalen Verlaufes von P muß auf experimentellem Wege erfolgen. Sie ist jedoch, wie schon erwähnt, durch die bestehende Abhängigkeit von Kenngrößen sehr erleichtert. Eine weitere Vereinfachung ist möglich, wenn man sich an Hand einiger Überlegungen darüber klar wird, unter welchen Bedingungen die einzelnen Größen überhaupt praktisch von Einfluß sind und wann ein Teil überhaupt von der Betrachtung ausgeschlossen werden kann.

Die Kenngröße $K_3 = \frac{h}{l}$ besagt, daß hinsichtlich der Lage zur Oberfläche in allen Fällen geometrische Ähnlichkeit bestehen muß, wie auch, nach dem oben Angeführten die Gl.26 überhaupt nur für geometrisch ähnliche Körper und Lagenbeziehungen gilt.

Die Kenngröße $K_5$ ist der Form nach identisch mit der R e y n o l d s 'schen Zahl; streng genommen stimmt sie nicht damit überein, da $\nu' = \frac{\eta' g}{\gamma}$ nicht eine Viskosität, sondern den Gleitmodul $\eta'$ enthält, der allerdings dieselbe Dimension wie die dynamische Zähigkeit besitzt. Da der Einfluß und der Aufbau von $K_5$ praktisch dem der R e y n o l d s 'schen Kennzahl bei rein viskosen Flüssigkeiten gleichkommt, sei diese Beziehung jedoch beibehalten. Setzt man

$$K_5 = Re = \frac{v \cdot l}{\nu'} = \frac{v \cdot l \gamma}{\eta' g} = \frac{v^2 \frac{\gamma}{g}}{\eta' \frac{v}{l}}$$

so erhält man das Verhältnis zweier auf die Flächeneinheit wirkender Kräfte. Der Zähler ist die doppelte dynamische

Druckhöhe $\frac{v^2 \gamma}{2g}$ und der Nenner $\eta' \frac{v}{l}$ der beim Geschwindigkeitsgefälle $\frac{v}{l}$ auf die Flächeneinheit wirkende Scherkraftanteil, dessen Größe durch $\eta'$, nicht aber durch $\tau$ beeinflußt wird. Bei sehr großen Werten von Re überwiegt also die dem Geschwindigkeitsquadrat verhältnisgleiche Trägheitskraft so sehr, daß P von Re und damit von dem Gleitmodul $\eta'$ (bei rein viskosen Flüssigkeiten von der Zähigkeit) unabhängig wird.

Eine ähnliche Überlegung läßt sich auch mit der F r o u d e 'schen Kennzahl $K_6$ anstellen. Man formt sie zu diesem Zweck um

$$K_7 = Fr = \frac{v^2}{g.l} = \frac{v^2 \frac{\gamma}{2g} l^2}{\frac{\gamma l^3}{2}}$$

Dies stellt das Verhältnis der dynamischen Druckkraft auf die Fläche $l^2$ zu dem halben Gewicht eines Flüssigkeitswürfels von der Kantenlänge $l$ dar. Wenn also Fr sehr groß ist, überwiegen demnach die Trägheitskräfte so sehr, daß keine merkliche Abhängigkeit von dieser Größe mehr besteht.

Die nächste Kenngröße, die neu ist, kann folgendermaßen umgeformt werden

$$K_8 = \frac{\tau l}{\eta' v} = \frac{\tau}{\eta' \frac{v}{l}}$$

In dieser Gestalt gibt sie das Verhältnis der auf die Flächeneinheit wirkenden Fließspannung zu dem lediglich durch $\tau$ bedingten Scherkraftanteil (vergl. $K_5$) wieder. Der Einfluß von $K_7$ auf P verschwindet, wenn diese Kennzahl klein ist.

Zum Schluß liefert $K_9$

$$K_9 = \frac{\alpha}{\gamma \ell^2} = \frac{\alpha \ell}{\gamma \ell^3}$$

das Verhältnis der auf die Länge 1 wirkend gedachten Oberflächenspannung zum Gewicht eines Flüssigkeitswürfels von der Kantenlänge $\ell$. Wie leicht einzusehen ist, kann die Oberflächenspannung nie von wesentlichem Einfluß sein, wenn der bewegte Körper größere Abmessungen besitzt. Ihre Wirkung wird jedoch bei feinen Teilchen, die sich in hinreichender Nähe des Spiegels befinden, überwiegen. So z.B. beträgt die Oberflächenspannung des Wassers bei 20°C rund 70 Dyn/cm, d.h. etwa $7.10^{-3}$ kg/m. Für ein würfelförmiges Teilchen von 0,1 mm Kantenlänge wird

$$K_9 = \frac{\alpha \ell}{\gamma \ell^3} \quad \frac{7.10^{-3} \cdot 10^{-4}}{10^3 \cdot 10^{-12}} = 700$$

Da $\gamma \cdot 1^3$ von der Größenanordnung des Teilchengewichtes ist, heißt dies, daß die von der Oberflächenspannung herrührenden Kräfte ein Mehrhundertfaches davon betragen+). Trotzdem werden die Vorgänge auch hierbei für den gesamten Flüssigkeits-

+) Hierdurch erklärt sich wahrscheinlich die Tatsache, daß feine Teilchen, die sich an einer Flüssigkeitsoberfläche befinden, sich bewegen, wie wenn sie in eine "Haut" eingespannt wären.

bereich nicht von wesentlicher Bedeutung+) sein, da die Kräfte nur in Spiegelnähe wirksam sind (zusätzliche Abhängigkeit von $K_3 = \frac{h}{\ell}$ ).

Die Anwendung der so gefundenen Beziehungen auf dem Gebiet des Rührens und Knetens ergeben eine Reihe von neuen Modellregeln. Läßt man die Kenngrößen, die die geometrische Ähnlichkeit und den Einfluß der Oberflächenspannung berücksichtigen, weg, so gilt:

$$P = F \left( \frac{v \ell}{\nu'}; \frac{v^2}{g \ell}; \frac{\tau \ell}{\eta' v} \right) \frac{\gamma}{g} \ell^2 v^2 \qquad \text{(kg)}$$

$$L = F \left( \frac{v \ell}{\nu'}; \frac{v^2}{g \ell}; \frac{\tau \ell}{\eta' v} \right) \frac{\gamma}{g} \ell^2 v^3 \qquad \text{(m kg/sec)}$$

Wird die erforderliche Leistung L (mkg/sec) sowohl durch Trägheitskräfte, Reibungskräfte, Schwerkräfte und Fließwiderstand beeinflußt, so müssen bei einem Modellversuch (Index m) wieder die Kenngrößen paarweise dem des Hauptver-

+) Anders dagegen ist es, wenn man die Einflüsse einer Grenzflächenspannung ß betrachtet, die an der Trennfläche zwischen zwei Stoffen auch im Innern der Flüssigkeit oder Paste wirksam ist. Diese liefert eine neue Kenngröße $K_{10} = \frac{\beta}{\gamma \cdot 1^2}$, die in ihrem Aufbau $K_9$ gleich sein muß, da $\alpha$ und ß dimensionsgleich sind. Eine Berücksichtigung dieser Kenngröße, die gegebenenfalls mit anderen zu koppeln ist, um den Einfluß der Geschwindigkeit in Betracht ziehen zu können, dürfte für die Hydrodynamik der Suspensionen und Emulsionen von Bedeutung sein. Allerdings wird die meßtechnische Erfassung von Erscheinungen der genannten Art Schwierigkeiten bereiten, da zunächst schon die Ermittlung der Größe der Grenzflächenspannung nicht einfach ist und außerdem bei hochdispersen Systemen noch eine Reihe von weiteren physikalischen und chemischen Einflüssen zur Geltung kommen.

Die Oberflächenspannung einer Flüssigkeit ist für den Vorgang der Gasverteilung und Blasenbildung naturgemäß sehr wesentlich. Hierauf wird bei der Behandlung der Gasrührer näher eingegangen.

suches (Index h) gleich sein:

$$\frac{v_m \, \ell_m}{\nu'_m} = \frac{v_h \, \ell_h}{\nu'_h}$$

$$\frac{v_m^2}{g\ell_m} = \frac{v_h^2}{g\ell_h}$$

$$\frac{\tau_m \, \ell_m}{\eta'_m \, v_m} = \frac{\tau_h \, \ell_h}{\eta'_h \, v_h}$$

Daraus folgt dann für Stoffeigenschaften und Geschwindigkeit des Modellversuches

$$v_m = v_h \sqrt{\frac{l_m}{l_h}} = v_h \sqrt{\frac{1}{m}}$$

$$\nu_m = \nu_h \sqrt{\left(\frac{l_m}{l_h}\right)^3} \qquad \eta'_m = \eta'_h = \frac{\gamma_m}{\gamma_h} \sqrt{\left(\frac{l_m}{l_h}\right)^3}$$

$$\tau_m = \tau_h \, \frac{\gamma_m}{\gamma_h} \, \frac{l_m}{l_h}$$

und durch Einsetzen der Werte für $v$ in Gl.26

$$L_h = L_m \cdot m^{3,5} \, \frac{\gamma_h}{\gamma_m}$$

d.h. hinsichtlich der Leistungen dieselbe Beziehung wie Gl.18.

Aus den zu verwirklichenden Forderungen bezüglich $\eta'_m$ und $\tau_m$ geht hervor, daß bei plastischen Stoffen die exakte Durchführung eines Modellversuches noch größere Schwierigkeiten bereitet, als wenn nur Schwere, Trägheits- und Zähigkeitskräfte wirken, denn für die Paste werden zwei bestimmte Stoffeigenschaften gefordert.

In den meisten Fällen kann man jedoch schon bei verhältnismäßig dünnen Pasten den Einfluß der Erdschwere vernachlässigen. Hierdurch treten hinsichtlich der Modellversuche bedeutende Vereinfachungen auf. Für die Großausführung und das Modell muß dann folgendes gelten:

$$\left.\begin{aligned} \frac{v_m \ell_m}{\nu'_m} &= \frac{v_h \ell_h}{\nu'_h} \\ \frac{\tau_m \ell_m}{\eta'_m v_m} &= \frac{\tau_h \ell_h}{\eta'_h v_h} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \text{ Gl 27}$$

dividiert man die erste Gleichung durch die zweite, so folgt:

$$v_m = v_h \sqrt{\frac{\gamma_h}{\gamma_m} \quad \frac{\tau_m}{\tau_h}}$$

Der Wert von $v_m$ in die zweite Gleichung eingesetzt, liefert

$$\frac{\ell_m \sqrt{\gamma_m \tau_m}}{\eta'_m} = \frac{\ell_h \sqrt{\gamma_h \tau_h}}{\eta'_h}$$

Von den fünf in der Gl. 27 vorkommenden Verhältnissen

$$\frac{\ell_m}{\ell_h}; \frac{\eta'_m}{\eta'_h}; \frac{\gamma_m}{\gamma_h}; \frac{\tau_m}{\tau_h}; \frac{v_m}{v_h}$$

ist das erste durch das Maßstabsverhältnis festgelegt, während die vier anderen nur der Gl. 27 und der Bedingung $\frac{\eta'_m}{\gamma_m} = \frac{\eta'_h}{\gamma_h}$ genügen müssen. Damit bleibt die Wahl einer beliebigen weiteren Beziehung freigestellt. Sucht man eine Modellpaste, für die

$$\frac{\gamma_h}{\gamma_m} \qquad \frac{\tau_h}{\tau_m} \qquad \ldots\ldots \text{ Gl. 28}$$

gilt, so ist

$$v_m = v_h \quad \text{und}$$

$$\frac{l_m \tau_m}{\eta'_m} = \frac{l_h \tau_h}{\eta'_n} \qquad \ldots\ldots\ldots \text{ Gl. 28}$$

und somit

$$L_h = L_m \; m^2 \; \frac{\gamma_h}{\gamma_m}$$

Auch in diesem einfacher gelagerten Falle ist also für die korrekte Durchführung eines Modellversuches die Kenntnis der Stoffbeiwerte erforderlich. Allerdings besteht in der Auswahl der Modellpaste eine weit grössere Freiheit, da die Bedingung der Gl. 27 beliebig ist und auch in Gl. 28 nur der Quotient beider Stoffwerte eingeht.

Immerhin lässt die Beziehung

$$L = F\left(\frac{h}{l} \quad \frac{v.l}{\nu'} \quad \frac{\tau\, l}{\eta' v}\right) \frac{\gamma}{g} \quad v^3 \, \ell^2 \qquad +)$$

bereits eine einfache Darstellung des Beiwertes über der R e y n o l d s'schen Zahl mit $\frac{\tau\, l}{\eta' v}$ als Parameter zu, d.h. es können einfache Rechentafeln aufgestellt werden, mit denen die Rührerleistung nach Gl. 20 ermittelt wird.

Diese besitzen jedoch nur dann Bedeutung, wenn geeignete Viskosimeter für die Messung von $\eta'$ und $\tau$ als Funktion der Temperatur vorhanden sind.

----------

+) Trotzdem die Erdschwere keinen merklichen Einfluss mehr haben soll, kann noch eine Abhängigkeit von der Tiefenlage h bestehen, da die sich in der Oberflächennähe ausbildende Strömungsform eine andere als in grösserer Tiefe ist.

Bei sehr großer Konsistenz der Paste verschwinden auch die Einflüsse der Trägheitskräfte gegenüber den durch die großen Fließwiderstände bedingten Schubspannungen. Zur Ermittlung der hierbei geltenden Gleichung für den benötigten Leistungsaufwand ist es zweckmäßig, nochmals eine Dimensionsbeziehung aufzustellen. Die Gl. 24 vereinfacht sich nunmehr zu

$$f\ (l,\ h,\ P,\ \eta',\ \tau\ v) = 0.$$

Man findet in gleicher Weise zunächst

$$K_1 = 1$$

$$K_2 = \frac{h}{l}$$

$$K_3 = 1$$

$$K_4 = \frac{\eta' \ell v}{P}$$

$$K_5 = \frac{\tau \ell^2}{P}$$

$$K_6 = 1$$

Aus $K_5 : K_4$ ergibt sich wieder $K_5' = \frac{\tau \ell}{\eta' v}$ und somit

$$f\left(\frac{h}{\ell}, \frac{\tau \ell}{\eta' v}, \frac{\eta' \ell v}{P}\right) = 0 \quad \text{d.h.}$$

$$P = F\left(\frac{h}{\ell}\ \frac{\tau \ell}{\eta' v}\right) \eta' \ell v \qquad \ldots\ldots\ \text{Gl. 29}$$

$$L = F\left(\frac{h}{\ell}\ \frac{\tau \ell}{\eta' v}\right) \eta' \ell v^2 \qquad \ldots\ldots\ \text{Gl. 30}$$

In dem Sonderfall $\tau = 0$ (rein viskose Flüssigkeit $\eta' = \eta$ ) gilt

$$P = \underbrace{F \left(\frac{h}{l}\right)}_{C} \eta \; l \cdot v \quad \ldots\ldots\ldots \text{ Gl.31}$$

Hierin ist also der Beiwert C nur noch eine Apparatkonstante. Multipliziert man Gl.31 mit $Re = \frac{v \cdot l}{\nu}$, so ergibt sich die Beziehung

$$P = F\left(\frac{h}{l}\right) \frac{\gamma}{g} \quad l^2 \quad v^2$$

Wir finden somit, daß Gl.31 bei sehr kleinen R e y - n o l d s 'schen Zahlen auch folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$P = F\left(\frac{h}{l} \frac{1}{Re}\right) \frac{\gamma}{g} \quad v^2 \quad l^2 = F\left(\frac{h}{l}\right) \cdot \eta \quad l \; v$$

Dies besagt ganz allgemein, daß bei rein viskosen Flüssigkeiten der Beiwert C im Bereich hinreichend kleiner R e y n o l d s 'scher Zahlen diesen umgekehrt proportional ist. Es ist dies das Gesetz des Bewegungswiderstandes bei laminarer Strömung.

Die Gl.29 besagt, daß bei überwiegendem Vorherrschen der plastischen Eigenschaften dann Modellähnlichkeit besteht, wenn die Beziehung

$$\frac{\tau_m \, l_m}{\eta'_m \, v_m} = \frac{\tau_h \, l_h}{\eta'_h \, v_h}$$

erfüllt ist. Wählt man für Modell und Hauptausführung die gleiche Paste, dann ergibt sich

$$\frac{l_m}{v_m} = \frac{l_h}{v_h}$$

d.h. es besteht Modellähnlichkeit, wenn bei der Hauptausführung und beim Versuch dieselbe Drehzahl eingestellt wird. Daraus folgt mit Gl.30

$$L_h = L_m \cdot m^3$$

Hierdurch ergibt sich die außerordentlich wesentliche Folgerung, daß bei hinreichend konsistenten Produkten die Durchführung von Modellversuchen ohne die Kenntnis der Stoffbeiwerte möglich ist.

Für geometrisch ähnliche Verarbeitungsmaschinen kann der Zusammenhang zwischen Kraft (bzw. Leistungsbedarf), Geschwindigkeit, dem Gleitmodul, der Fließfähigkeit und der Apparategröße durch eine einzige Kurve wiedergegeben werden.

Die neu gefundenen Kennzahl $\frac{\tau \cdot \ell}{\tau' v}$ ist für das Erfassen der bei der Verarbeitung von plastischen Stoffen geltenden Gesetze von großer Bedeutung+), denn sie gestattet nicht nur Verallgemeinerung von Einzelmeßwerten, die beim Rühren und Kneten gewonnen werden, sondern sie ermöglicht in gleicher Weise die Anwendung der Ähnlichkeitsmechanik auf alle Maschinen, mit denen eine Verformung plastischer Stoffe vorgenommen wird. Da wohl der größte Teil der bekannten härtbaren oder thermoplastischen Kunststoffe, die Ausgangsprodukte der keramischen Industrie,

---

+) Das Vorhandensein dieser Kenngröße wurde bereits vor längerer Zeit aus einer für das Fließen derartiger Pasten aufgestellten Differentialgleichung gefunden und die Gültigkeit durch Versuche bestätigt. Für ihre Ableitung wurde in diesem Bericht dem wesentlich einfacheren W e b e r 'schen Verfahren der Vorzug gegeben.

der Teigwarenfabrikation u.a. in guter Annäherung dem Ansatz (21) gehorchen, ist durch die Auffindung der neuen Kennzahl $\frac{\tau l}{\eta^2 v}$ die Möglichkeit zur Verallgemeinerung einzelner Meßwerte gegeben. Die neue Erkenntnis ist auch besonders für die Gummiverarbeitung von Bedeutung, da nach Untersuchungen von W e i d n e r +) der einfache mathematische Ansatz nach Gl.21 sowohl für Naturkautschuk als auch für Buna in reiner Form oder in Vermischung mit Füllstoffen sehr genau gilt.

Es ist deshalb möglich, für Pressen, Strangpressen und Walzenstühle verschiedener Größe die auftretenden Drücke und den für ihren Betrieb erforderlichen Leistungsbedarf zu bestimmen, wenn zuvor mit einer Größentype in richtiger Weise Modellversuche vorgenommen wurden.

Diese Ähnlichkeitsbetrachtungen können aber in sinngemäßer Weise auch auf das Fließen von Pasten in Röhren und Gerinnen, auf Pumpen zu ihrer Förderung usw. angewendet werd-n.

Weicht bei plastischen Stoffen das durch Kapillarmessungen festgestellte, hydrodynamische Verhalten wesentlich von dem ab, wie es durch den Ansatz nach Gl.21 gegeben ist, so führt die Beziehung

$$\sigma = k \left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)^n$$

oder

$$\sigma = \tau + k \left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)^n$$

---

+) W e i d n e r . Die plastischen Eigenschaften von Kautschuken. Bericht der physikalischen Abteilung Lu.

meist zu einer genügenden Anpassung, wenn k und n geeignet gewählt werden. Die dem neuen Ansatz entsprechenden Kenngrößen ergeben sich in gleicher Weise nach dem W e b e r'schen Verfahren.